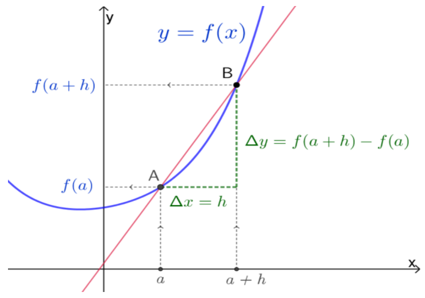
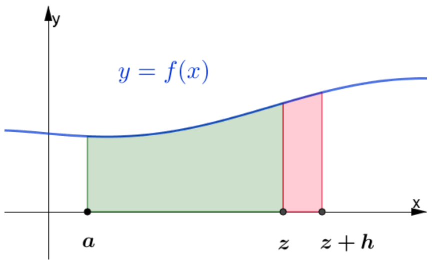
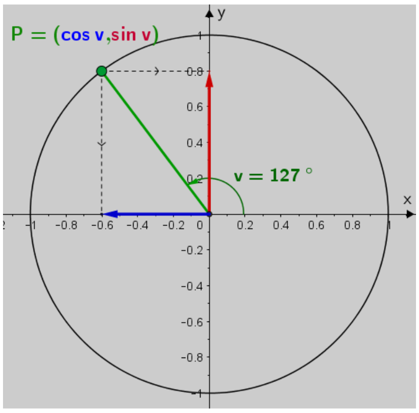
2020

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a}{x^n} = 0 \qquad \text{för alla } a \text{ och alla } n > 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x-5}{2x-7} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\cdot\left(3-\frac{5}{x}\right)}{x\cdot\left(2-\frac{7}{x}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(3-\frac{5}{x}\right)}{\left(2-\frac{7}{x}\right)} = \frac{3}{2}$$







Ma 3c Sammanfattning

EN HELTÄCKANDE SAMMANFATTNING MED TEORI OCH LÖSTA UPPGIFTER

GEORGIOS THEODORIDIS

ANNA WHITLOCKS GYMNASIUM

Innehåll

Polynom, rationella uttryck, gränsvärde

Polynom

Ett polynom är en summa av variabeltermer och en konstantterm där exponenten av variabeltermerna är ett positivt heltal.

Exempel: $2x^3 - 3x + 4$ är ett polynom av **grad** 3.

Exempel: -7 är ett polynom av **grad** 0.

Exempel: $\frac{2}{x^2} - 3x$ och $3x^{\frac{1}{2}} - x^2$ är inga polynom.

$f(x) = x^4 - 3x + 5$ är en **polynomfunktion** av 4:e graden. **Värdet** av polynomet för $x = -2$ ges av $f(-2) = (-2)^4 - 3(-2) + 5 = 27$

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$
(där n är ett positivt heltal och $a_0, a_1, \dots, a_n$ är reella tal) är en **polynomfunktion av grad n**.

Några regler vid räkning med polynom

$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$

Kvadreringsregler
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Konjugatregeln
$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Faktorisering av polynom

Om $p(x)$ är en polynomfunktion och $p(a) = 0$ så är $x = a$ ett **nollställe** till polynomet.

Följ stegen nedan vid faktorisering av Polynom

1. Bryt ut största möjliga faktor
2. Använd konjugatregler/kvadreringsregeln
3. Nollställen

Exempel: Faktorisera $3x^4 - 27x^2$

$3x^4 - 27x^2 = 3x^2(x^2 - 9) = 3x^2(x + 3)(x - 3)$

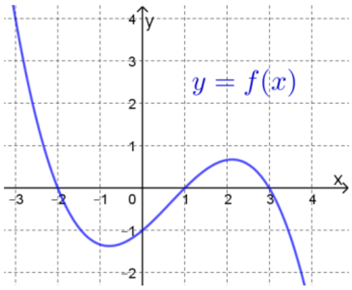
För polynom gäller att om vi vet deras nollställen så kan vi faktorisera polynomen.

Exempel: För 3:e gradsfunktionen $f(x)$ gäller att $f(-2) = f(-1) = f(2) = 0$.
Då vet vi att
$f(x) = a(x + 2)(x + 1)(x - 2)$ där a är ett reellt tal $\neq 0$. För att bestämma a behöver vi mera information. Om vi t.ex. vet att $f(0) = 2$ så får vi

$2 = a(0 + 2)(0 + 1)(0 - 2) = -4a \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$

Vi får då att $f(x) = -\frac{1}{2}(x + 2)(x + 1)(x - 2)$

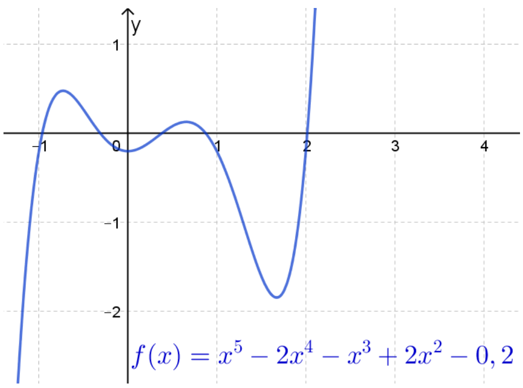
Exempel: Bestäm 3:e gradsfunktionen $f(x)$ med hjälp av grafen nedan



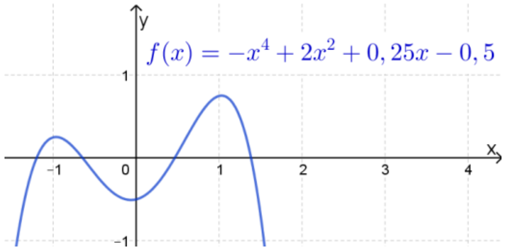
Vi kan från grafen avläsa nollställena till $f(x)$:
$x_1 = -2, x_2 = 1$ och $x_3 = 3$ och vi får då att $f(x) = a(x + 2)(x - 1)(x - 3)$. Dessutom ser vi att $f(0) = -1$ vilket ger att $a = -\frac{1}{6}$ (visa det!). Vi får då att $f(x) = -\frac{1}{6}(x + 2)(x - 1)(x - 3)$

Allmänt gäller för n:te grads polynomfunktioner:

- De har **maximalt** n nollställen
- Om n är **udda** så har polynomet minst ett nollställe
- Om n är **jämn** så kan polynomet sakna nollställen



Ett 5:e grads polynom med 5 nollställen. Hur kan man ändra den **konstanta termen** så att polynomet har 1, 2, 3 eller 4 nollställen?



Ett 4:e grads polynom med 4 nollställen. Hur kan man ändra den **konstanta termen** så att polynomet får 0, 1, 2 eller 3 nollställen?

Polynomekvationer

Om $p(x)$ är en polynomfunktion av grad n så är $p(x) = 0$ en **polynomekvation av grad n.**

2:a grads ekvationen $x^2 = a$ där $a \geq 0$ har lösningen $x = \pm\sqrt{a}$ (**kvadratrotmetoden**)

2:a grads ekvationen $x^2 + px + q = 0$ har lösningen

$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ (**p-q-formeln**)

Nollproduktsregeln är användbar:
Om $a \cdot b = 0$ så är antingen $a = 0$ eller $b = 0$ (eller så är båda noll).

Exempel: Lös ekvationen
$-5(x-3)(x+4)(x+7) = 0$

Nollproduktsregeln ger direkt att
$x - 3 = 0$ eller $x + 4 = 0$ eller $x + 7 = 0$
Vi får då lösningarna $x_1 = -7, x_2 = -4$ och $x_3 = 3$

Exempel: Lös ekvationen $-3x^3 + 12x = 0$

Vi faktoriserar uttrycket och sedan använder nollproduktsmetoden:
$-3x(x^2 - 4) = 0$ och vi får att
$x_1 = 0$ eller $x^2 - 4 = 0$ vilket med kvadratrotmetoden ger att $x_2 = -2$ och $x_3 = 2$
Vi har lösningarna $x_1 = 0,\ x_2 = -2$ och $x_3 = 2$

Exempel: Lös ekvationen $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$

Vi löser den med **substitution**. Vi sätter $x^2 = t$ och får (då $x^4 = t^2$) att $t^2 - 6t + 8 = 0$
P-q-formeln ger att $t_1 = 2$ och $t_2 = 4$. Vi får då att $x^2 = 2$ eller $x^2 = 4$, vilket ger lösningarna
$x_1 = -\sqrt{2},\ x_2 = \sqrt{2},\ x_3 = -2$ och $x_4 = 2$

Vi kan i allmänhet lösa ekvationer antingen grafiskt eller med hjälp av symbolhanterande verktyg som exempelvis GeoGebra.

Rationella uttryck

Ett **rationellt uttryck** är en kvot mellan två polynom som exempelvis $\frac{4x^3-2}{2x-4}$ eller mera allmänt $\frac{p(x)}{q(x)}$

Observera att ett rationellt uttryck **inte är definierat för de x-värden för vilka nämnaren blir noll**.

Exempel: $\frac{4x^3-2}{2x-4}$ är inte definierat för $x = 2$

Exempel: $\frac{p(x)}{q(x)}$ är inte definierat för alla x för vilka $q(x) = 0$, dvs nollställena till $q(x)$.

Hur förenklar man rationella uttryck?

1) Addera/subtrahera och/eller multiplicera/dividera så att du får allt i ett gemensamt bråk $\frac{p(x)}{q(x)}$
2) Faktorisera nu täljaren och nämnaren **var för sig** (enligt anvisningar om faktorisering av Polynom ovan)
3) **Det är först nu** som du kan förkorta de gemensamma faktorerna för täljaren och nämnaren. **Förkorta INTE innan du faktoriserat!**

Exempel: $\frac{3x^2-6x}{5x-10} = \frac{3x(x-2)}{5(x-2)} = \frac{3x}{5}$

Exempel: $\frac{x^2-6x+9}{7x-21} = \frac{(x-3)^2}{7(x-3)} = \frac{x-3}{7}$

Exempel: $\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x} = \frac{2}{x-1} \cdot \frac{x}{x} - \frac{1}{x} \cdot \frac{x-1}{x-1} =$

$= \frac{2x}{x(x-1)} - \frac{x-1}{x(x-1)} = \frac{2x-(x-1)}{x(x-1)} = \frac{x+1}{x(x-1)}$

Exempel: $\frac{5x-15}{x+2} \cdot \frac{x^2-4}{5x} = \frac{(5x-15)\cdot(x^2-4)}{(x+2)\cdot 5x} =$

$\frac{5(x-3)(x+2)(x-2)}{5x(x+2)} = \frac{(x-3)(x-2)}{x}$

Eftersom ett rationellt uttryck inte är definierat för de x-värden för vilka nämnaren blir noll så betyder det exempelvis att

$$\frac{x^2-1}{3x+3} = \frac{(x+1)(x-1)}{3(x+1)} = \frac{x-1}{3} \quad \text{för } x \neq -3$$

Dvs **likheten gäller inte för** $\boldsymbol{x = -3}$ då $\frac{x^2-1}{3x+3}$ inte är definierat för det x-värdet. Notera också att $\frac{x-1}{3}$ är däremot definierat för $x = -3$.

Ekvationer med rationella uttryck

En rationell ekvation är en ekvation som innehåller rationella uttryck

$$\frac{3+x}{3x} + \frac{x}{15} = \frac{5-x}{5x}$$

Observera att när du löser en ekvation med rationella uttryck så kan du få **falska rötter (otillåtna rötter)**. Ett rationellt uttryck är ju inte definierat för de x-värden för vilka nämnaren blir noll. **Så när du löser ekvationen kolla alltid att nämnaren inte blir noll för dessa x-värden. Blir nämnaren noll för någon av dina lösningar så är den en falsk rot (otillåten rot).**

För ekvationen ovan ser vi att $x \neq 0$. Vi får efter multiplikation med MGN $= 15x$ i båda leden

$5(3+x) + x^2 = 3(5-x)$ och efter förenkling

$x^2 + 8x = 0$. Vi faktoriserar och får

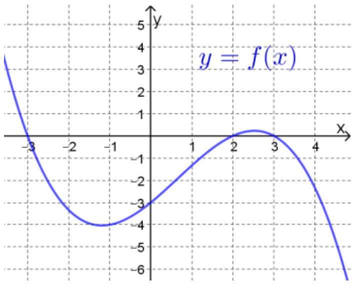
$x(x+8) = 0$ med lösningarna
$x_1 = -8 \text{ och } x_2 = 0$

Men $x \neq 0$ så x_2 är **inte tillåten**.

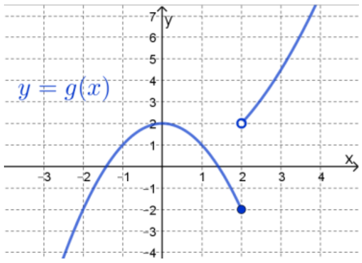
Ekvationen har enbart lösningen $x = -8$

Funktioner

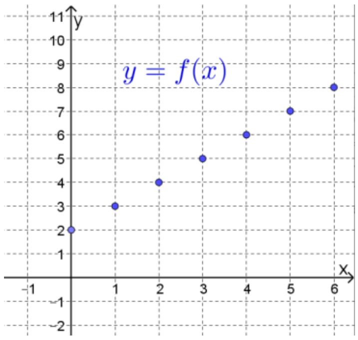
En funktion $y = f(x)$ är en regel som till varje tillåtet x-värde tilldelar exakt ett y-värde. De tillåtna x-värdena utgör funktionens **definitionsmängd** och de tilldelade y-värdena utgör funktionens **värdemängd**.



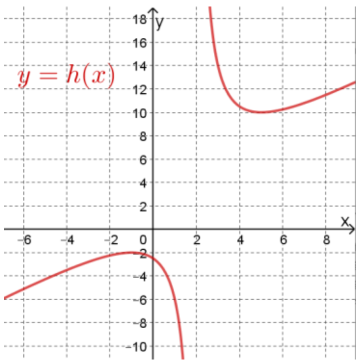
$y = f(x)$ är en **kontinuerlig funktion** dvs sammanhängande för alla tillåtna värden på x. Alla polynom är kontinuerliga funktioner.



$y = g(x)$ är en **diskontinuerlig funktion**. Den är definierad för alla x men den är inte sammanhängande. Observera också att $g(2) = -2$

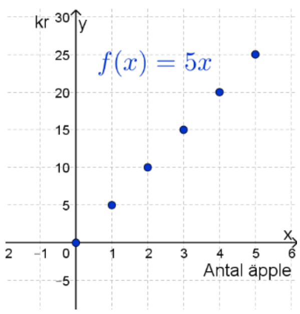


$y = f(x)$ är en **diskret funktion** som är definierat för vissa bestämda och åtskilda värden på x



$y = h(x) = \frac{x^2+5}{x-2}$ är en **rationell funktion** vars definitionsmängd är alla $x \neq 2$, eftersom nämnaren blir noll när $x = 2$. Funktionens värdemängd är $y \leq -2 \text{ och } y \geq 10$.

Exempel: I ett snabbköp kostar ett äpple 5 kr. Kostnaden y kr vid inköp av x st äpple är en diskret funktion $y = f(x) = 5x$ där definitionsmängden är de naturliga talen (0, 1, 2 …) och värdemängden (0, 5, 10 …)



Absolutbelopp

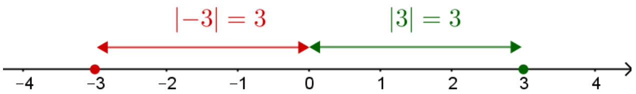
Absolutbeloppet av ett reellt tal a betecknas $|a|$ och definieras

$|a| = a$ om $a \geq 0$

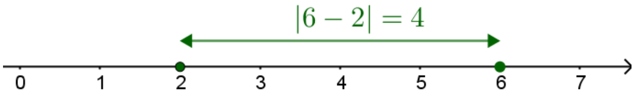
$|a| = -a$ om $a < 0$

Exempel: $|3| = 3$ och $|-3| = -(-3) = 3$

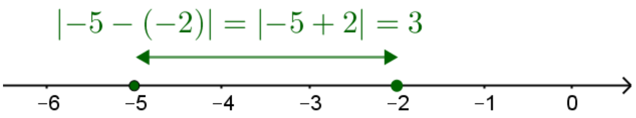
Om vi använder **tallinjen** kan vi tolka absolutbeloppet av ett tal a som **avståndet** (som är ett **positivt tal**) av talet från origo:



På samma sätt så kan vi **tolka:**
a) $|6-2| = |4| = 4$ som avståndet mellan 6 och 2:



b) $|-5+2| = |-5-(-2)| = |-3| = 3$ som avståndet mellan -5 och -2:

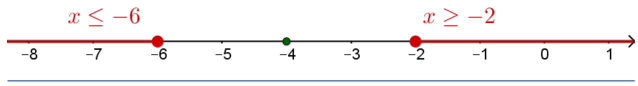


c) $|a-b|$ som **avståndet** mellan a och b.

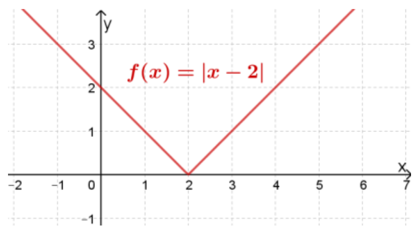
Exempel: $|-7| - |-3-6| = 7 - 9 = -2$

Exempel: Lös ekvationen $|x+4| \geq 2$.

Vi skriver om ekvationen: $|x+4| = |x-(-4)| \geq 2$
Vi söker alltså alla x vars avstånd från -4 är ≥ 2. Vi kan markera lösningarna på tallinjen:



Exempel: Med hjälp av absolutbelopp kan vi definiera funktioner som i figuren bredvid.



Funktionen är **kontinuerlig för alla x**.

Gränsvärde

$\lim_{x \to a} f(x) = A$ utläses:
"gränsvärdet av $f(x)$ när x närmar sig a är A" eller
"limes av $f(x)$ när x närmar sig a är A" eller
"$f(x)$ närmar sig A när x går mot a".

Om $f(x)$ är definierad för $x = a$ så är $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Men om den inte är definierad för $x = a$ så behöver vi hitta metoder för att beräkna gränsvärdet.

Exempel på gränsvärde

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 3x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x(x+3)}{x} = \lim_{x \to 0} (x+3) = 3$$

Vi ser här att $\frac{x^2+3x}{x}$ **inte är definierat** för $x = 0$. Men efter förenklingen så får vi uttrycket $x + 3$, som **är definierat** för $x = 0$. Gränsvärdet är då lika med uttryckets värde för $x = 0$.

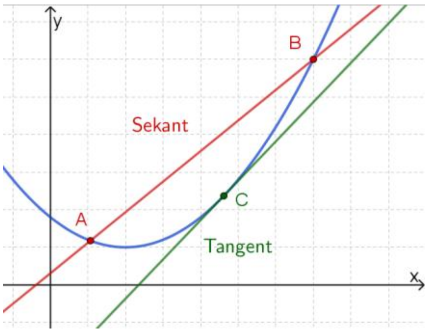
$$\lim_{x \to \infty} \frac{a}{x^n} = 0 \qquad \text{för alla } a \text{ och alla } n > 0$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x-5}{2x-7} = \lim_{x \to \infty} \frac{x \cdot \left(3 - \frac{5}{x}\right)}{x \cdot \left(2 - \frac{7}{x}\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{\left(3 - \frac{5}{x}\right)}{\left(2 - \frac{7}{x}\right)} = \frac{3}{2}$$

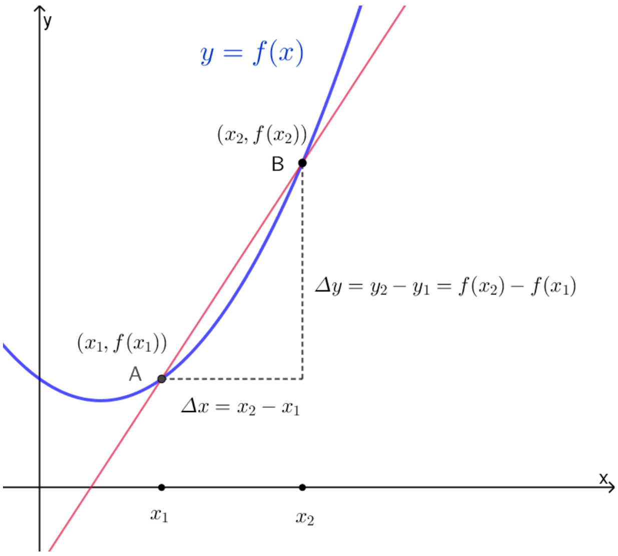
OBSERVERA att när man i vanliga fall faktoriserar ett polynom så vill vi att **faktorerna också ska vara polynom**. Dvs vi vill inte ha faktorer som t.ex. $\left(x - \frac{3}{x^2}\right)$ som **inte** är polynom. Notera dock att det är önskvärt att ha sådana faktorer när vi ska bestämma $\lim_{x \to \infty} \frac{3x-5}{2x-7}$ som ni kan se ovan.

Sekant, tangent och derivata

Sekant och tangent



Sekantens lutning och ändringskvot



En sekant som går igenom punkterna $(x_1, f(x_1))$ och $(x_2, f(x_2))$ på kurvan $y = f(x)$ har lutningen

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Kvoten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ kallas **ändringskvot**, **differenskvot** eller den **genomsnittliga förändringshastigheten** mellan x_1 och x_2. Sekantens lutning anger kurvans **medellutning** mellan x_1 och x_2.

Exempel: En dag i februari 1991 mätte en väderstation i Jokkmokk temperaturen y °C vid olika tidpunkter x h under dygnet enligt tabellen nedan

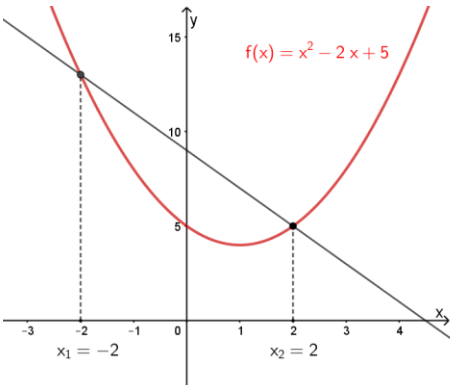
x	6:00	9:00	12:00	15:00	18:00
y	-13,5	-13,0	-13,1	-19,0	-25,8

Den genomsnittliga förändringshastigheten av temperaturen från kl 12:00 till 18:00 är

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-25{,}8 - (-13{,}1)}{18 - 12} = -\frac{12{,}7}{6} = -2{,}1$$

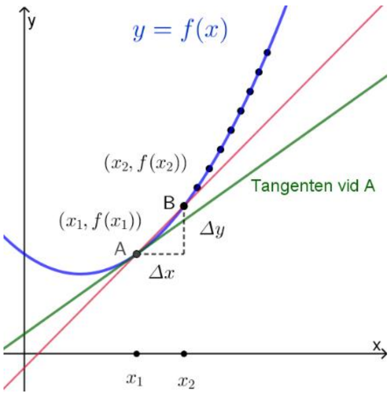
Från kl 12:00 till kl 18:00 **minskar** temperaturen med i genomsnitt 2,1 °C/h

Exempel: Bestäm sekantens lutning mellan $x_1 = -2$ och $x_2 = 2$



$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(2) - f(-2)}{2 - 2} = \frac{5 - 13}{4} = -2$$

Geometrisk definition av derivatan



När vi låter x_2 närma sig x_1 så närmar sig B punkten A, och sekanten övergår gradvis till tangenten i punkten A.

$f'(x_1)$ betecknar **derivatan** av funktionen $y = f(x)$ vid $x = x_1$ och är lika med **värdet av tangentens lutning k_A vid A,** dvs $f'(x_1) = k_A$.

Eftersom derivatan är lutningen av tangenten kan den tolkas som **kurvans lutning i punkten** eller som den **momentana förändringshastigheten** i punkten.

Sekantens lutning $k = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ närmar sig tangentens lutning k_A när x_2 närmar sig x_1 dvs

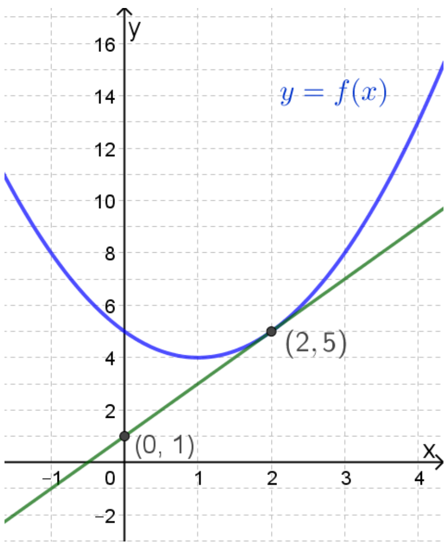
$f'(x_1) \approx \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ om x_2 är **väldigt nära** x_1.

Exempel: Om $f(x) = x^2 + 3$ så kan vi uppskatta

$$f'(1) \approx \frac{f(1{,}01) - f(1)}{1{,}01 - 1} = \frac{(1{,}01)^2 + 3 - (1^2 + 3)}{0{,}01} = \frac{0{,}0201}{0{,}01} = 2{,}01$$

Exempel: I figuren nedan ser du grafen till funktionen $y = f(x)$ samt en tangent vid punkten $(2{,}5)$. Bestäm med hjälp av figuren

a) Tangentens ekvation b) $f'(2)$

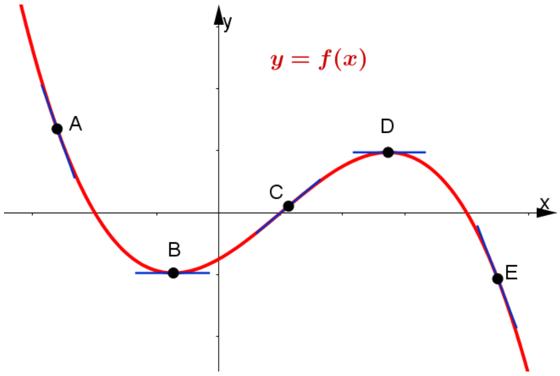


a) Tangenten går genom punkterna $(0{,}1)$ och $(2{,}5)$ och vi bestämmer dess ekvation på formen $y = kx + m$. Dess lutning ges av $k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5-1}{2-0} = 4$ och vi får att $y = 4x + 1$.

b) $f'(2) = 4 =$ tangentens lutning vid $(2{,}5)$

Exempel: Derivatans värde i några punkter på kurvan $y = f(x)$

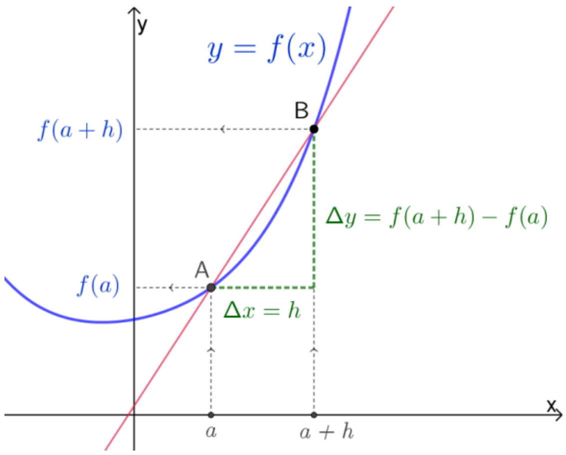
Derivatan är **noll** i B och D ($k_B = k_D = 0$)
Derivatan är **positiv** i C ($k_C > 0$)
Derivatan är **negativ** i A och E (k_A och $k_E < 0$)



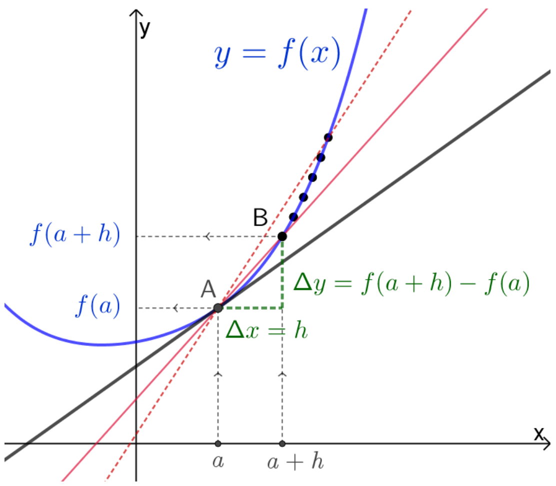
Algebraisk definition av derivatan

Det är nu lämpligt att ändra beteckning från x_1 och x_2 till a respektive $a+h$ enligt figuren nedan. Sekantens lutning (ändringskvoten) ges då av

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$



När $h \to 0$ så närmar sig punkten B punkten A och sekanten övergår gradvis till tangenten i punkten A enligt figuren nedan



Sekantens lutning närmar sig då tangentens lutning och vi kan nu **definiera derivatan** i en punkt där $x = a$ som ett gränsvärde

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Vi måste använda gränsvärde för att vi inte kan sätta $h = 0$ i ändringskvoten: Vi får då

$\frac{f(a+0)-f(a)}{0} = \frac{0}{0}$ vilket **inte går att definiera.**

Exempel: Låt $f(x) = x^2$ och bestäm

a) $f'(2)$ med derivatans definition.

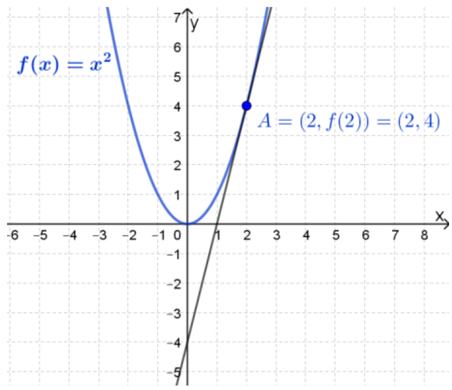
b) tangentens ekvation i punkten där $x = 2$.

c) $f'(a)$ med derivatans definition.

a) $$f'(2) = \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^2-2^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{4+4h+h^2-4}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{4h+h^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(4+h)}{h} = \lim_{h\to 0}(4+h) = 4$$

Dvs $f'(2) = 4$

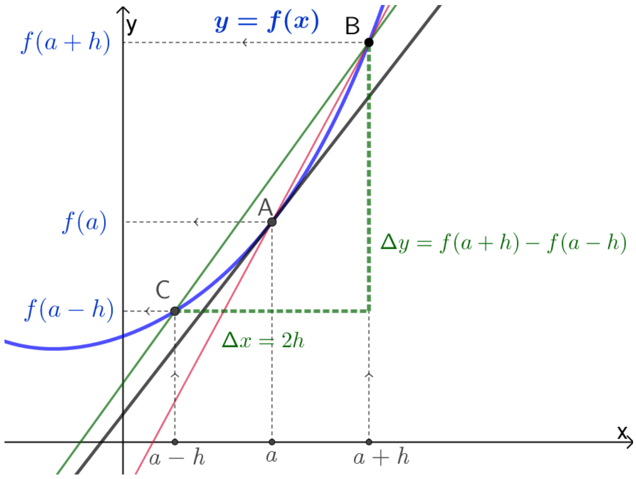
b) Tangentens lutning k är lika med derivatans värde i punkten där $x = 2$ dvs $k = f'(2) = 4$.
Vi får då att $y = 4x + m$.
För att få m-värdet behöver vi en punkt på tangenten. Men tangenten och kurvan $y = f(x) = x^2$ har en **gemensam punkt** $A = \big(2, f(2)\big) = (2, 2^2) = (2,4)$.
Dvs när $x = 2$ så är $y = 4$.
Detta ger en ekvation för m:
$4 = 4 \cdot 2 + m \Rightarrow m = -4$
Tangentens ekvation blir då $y = 2x - 4$ (se figur)



c) $$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^2-a^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2ah+h^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(2a+h)}{h} = \lim_{h\to 0}(2a+h) = 2a$$

Dvs om $f(x) = x^2$ så är $f'(a) = 2a$
Observera att det är först i sista raden, efter förenkling med h, som vi får ett utryck $(2a+h)$ som **är definierat för $h = 0$.**

Central differenskvot och numerisk derivering



I figuren ovan är den svarta linjen tangenten vid punkten A och den röda linjen sekanten från A till B vars lutning ger den differenskvot (den kallas för höger differenskvot) vi använt hittills

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Den gröna linjen är sekanten från C till B vars lutning definierar den centrala differenskvoten

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$$

Notera, från figuren ovan, att för samma värde på h **ger den centrala differenskvoten ett bättre värde på tangentens lutning** än den röda linjens differenskvot. Därför används den centrala differenskvoten vid **numerisk derivering** bl.a. i våra räknare. För **små värden på h** är då

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$$

Exempel: Låt $f(x) = 2x^4 - 5x^3$ och $h = 0{,}01$. Uppskatta $f'(1)$ med hjälp av

a) höger differenskvoten $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

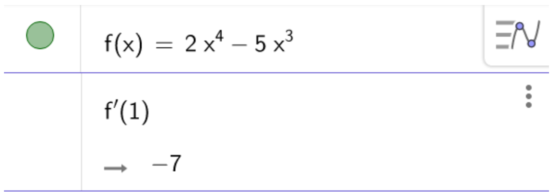
b) centrala differenskvoten $\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$

a) $f'(1) \approx \dfrac{f(1+0{,}01)-f(1)}{0{,}01} = \dfrac{-3{,}070297-(-3)}{0{,}01}$
$= -7{,}0297 \approx -7{,}03$

b) $f'(1) \approx \dfrac{f(1+0{,}01)-f(1-0{,}01)}{0{,}02}$
$= \dfrac{-3{,}070297-(-2{,}930303)}{0{,}02}$
$= -6{,}9997 \approx -7{,}00$

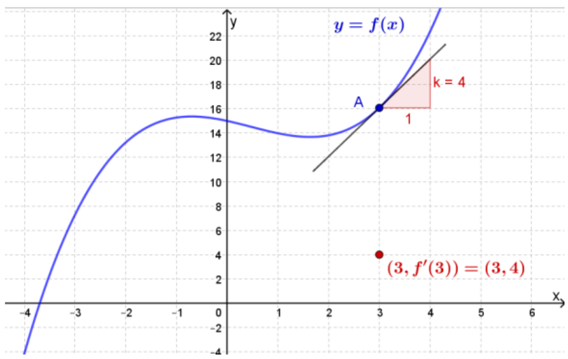
Det exakta värdet av $f'(1) = -7$ (det kan vi få genom att använda derivatans definition). Vi ser ovan att den centrala differenskvoten ger ett bättre närmevärde på derivatan än höger differenskvot.

Det går att beräkna ett numeriskt värde på derivatan med hjälp av ett digitalt verktyg som exempelvis med GeoGebra i figuren nedan

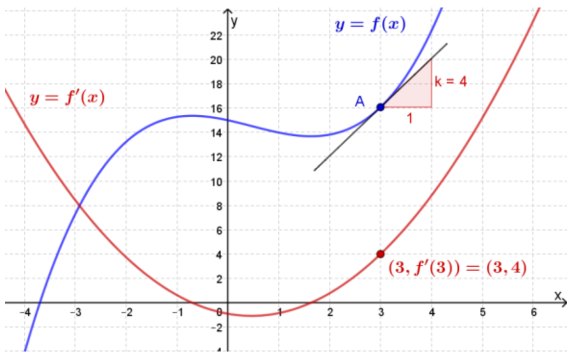


Från derivatan i en punkt $f'(a)$ till derivatan som en funktion $y = f'(x)$

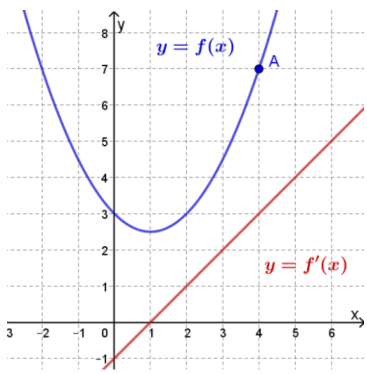
För funktionen $y = f(x)$ i figuren nedan gäller att derivatan för $x = 3$ är lika med 4. Dvs $f'(3) = 4$. Vi definierar nu en punkt med koordinaterna $(3, f'(3)) = (3,4)$ enligt figuren nedan.



Men för varje värde på x har derivatan $f'(x)$ **precis ett värde**. Så när vi ritar punkterna $(x, f'(x))$ för alla värden på x (se figuren nedan) får vi en funktion av x som vi kallar för **derivatan $y = f'(x)$ av funktionen $y = f(x)$ med avseende på x**.



Exempel:



I figuren bredvid ser du funktionen $y = f(x)$ samt dess derivata $y = f'(x)$. Bestäm med hjälp av figuren tangentens ekvation i den markerade punkten A.

Tangentens ekvation ges av $y = kx + m$ där $k = f'(4) = 3$ (efter avläsning från figur).

VI får då att $y = 3x + m$. För att bestämma m behöver vi en punkt på tangenten. Avläsning ger att $A = (4,7)$ dvs när $x = 4$ så är $y = 7$:
$7 = 3 \cdot 4 + m$ vilket ger att $m = -5$ och tangentens ekvation $y = 3x - 5$.

Exempel:

Bestäm med hjälp av derivatans definition $f'(x)$ om

a) $f(x) = C$, där C är ett reellt tal.

b) $f(x) = x^3$

---

a) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{C - C}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0$

Dvs, derivatan av en **konstant funktion** är noll. Vi ser detta geometriskt då en konstant funktion har **lutningen noll för alla x**.

b) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} =$
$\lim\limits_{h \to 0} \frac{(x+h)^2(x+h) - x^3}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{(x^2 + 2xh + h^2)(x+h) - x^3}{h} =$
$\lim\limits_{h \to 0} \frac{(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3\ ) - x^3}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} =$
$\lim\limits_{h \to 0} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} (3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2$

Dvs om $f(x) = x^3$, så är $f'(x) = 3x^2$

Vi ser från exempel b) ovan att det är ganska komplicerat att bestämma derivatan av en funktion. Det vore önskvärt om man kunde hitta mönster eller regler så att det blev enklare att derivera visa typer av funktioner. Lyckligtvis så går det att hitta sådana **deriveringsregler**.

Deriveringsregler

Man kan med hjälp av derivatans definition visa följande fyra regler (regel 2 är svårast att visa):

1) Om $f(x) = C$, där C är ett reellt tal, så är $f'(x) = 0$.
   Vi har visat detta i Exemplet ovan.
2) Om $f(x)$ är en **potensfunktion,** dvs $f(x) = x^n$, där n är ett godtyckligt reellt tal, så är $f'(x) = nx^{n-1}$
3) Om $f(x) = A \cdot g(x)$, där A är ett reellt tal och $g(x)$ en godtycklig funktion, så är $f'(x) = A \cdot g'(x)$
4) Om $f(x) = g(x) + h(x)$, där $g(x)$ och $h(x)$ är godtyckliga funktioner, så är $f'(x) = g'(x) + h'(x)$

Vi sammanfattar dessa regler i en tabell:

$f(x)$	$f'(x)$
C	0
x^n	nx^{n-1}
$A \cdot g(x)$	$A \cdot g'(x)$
$g(x) + h(x)$	$g'(x) + h'(x)$

Exempel: Bestäm med hjälp av deriveringsreglerna derivatan av följande funktioner:

a) $f(x) = 10$ b) $f(x) = x$ c) $f(x) = x^3$	d) $f(x) = 5x^3$ e) $f(x) = \frac{x^2}{4}$ f) $f(x) = -2x^4 + \frac{x^3}{3} + 5$

---

a) $f'(x) = 0$

b) $f(x) = x = x^1 \Rightarrow f'(x) = 1x^{1-1} = 1x^0 = 1$
(då $x^0 = 1$).

c) $f'(x) = 3x^{3-1} = 3x^2$
(I förra **Exemplet** visade vi att $f'(x) = 3x^2$ med hjälp av **derivatans definition**).

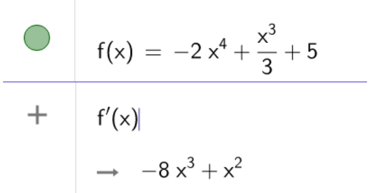
d) $f'(x) = 5 \cdot 3x^2 = 15x^2$
(Vi har använt deriveringsregel 2 och 3)

e) $f(x) = \frac{x^2}{4} = \frac{1}{4} \cdot x^2$

$f'(x) = \frac{1}{4} \cdot 2x = \frac{2x}{4} = \frac{x}{2}$

f) $f'(x) = -8x^3 + \frac{3x^2}{3} = -8x^3 + x^2$
Vi har här använt alla deriveringsregler.

Man kan använda ett **digitalt verktyg** som **GeoGebra** för att bestämma derivatan:



Exempel: Bestäm med hjälp av deriveringsreglerna derivatan av följande funktioner

a) $f(x) = kx + m$ c) $f(x) = \sqrt{x} + x\sqrt{x}$

b) $f(x) = \frac{4}{x^2}$

---

a) $f'(x) = k$
Dvs, derivatan av en rät linje är lika med dess riktningskoeficient k. Den räta linjens **lutning** (= **derivatan**) är ju lika med k för alla x.

b) **Vi måste först omvandla till potensform**:
$f(x) = \frac{4}{x^2} = 4x^{-2}$
$f'(x) = 4 \cdot (-2)x^{-2-1} = -8x^{-3} = -\frac{8}{x^3}$

c) Vi måste först skriva om de två termerna i **potensform**:
$f(x) = \sqrt{x} + x\sqrt{x} = x^{1/2} + xx^{1/2}$
$= x^{1/2} + x^{3/2}$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} + \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{3}{2}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

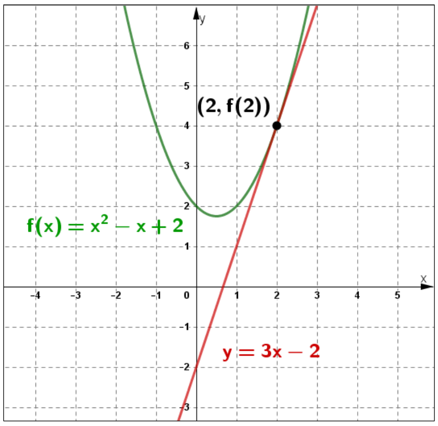
Exempel: Låt $f(x) = x^2 - x + 2$ och bestäm tangentens ekvation vid punkten där $x = 2$.

Tangentens ekvation ges av $y = kx + m$. Eftersom derivatan av $f(x)$ vid $x = 2$ är lika med tangentens lutning vid punkten, så är $k = f'(2)$.

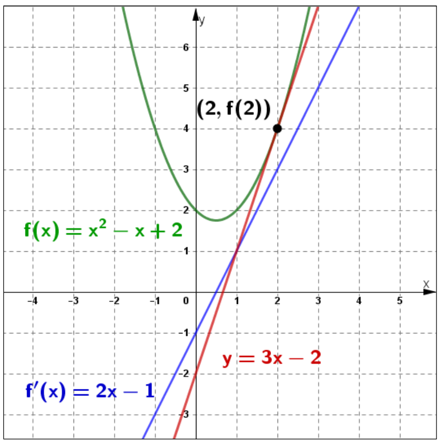
$f'(x) = 2x - 1$ och $f'(2) = 3$. Vi får då att $y = 3x + m$

För att bestämma m behöver vi en punkt på linjen. Tangenten och kurvan $y = f(x)$ har en gemensam punkt $(2, f(2)) = (2, 2^2 - 2 + 2) = (2,4)$. Dvs, när $x = 2$ så är $y = 4$. Vi får då en ekvation för m:

$4 = 3 \cdot 2 + m \;\Rightarrow\; m = -2$ och $y = 3x - 2$.
Figuren nedan visar hur det ser ut grafiskt.



Notera skillnaden mellan tangentens ekvation och kurvan $y = f'(x) = 2x - 1$, som också är en rät linje. Tangenten ändras med tangeringspunkten, men $f'(x)$ ändras inte.



Derivatan av exponentialfunktioner

$$f(x) = C \cdot a^x$$

Vi har hittills tagit fram deriveringsregler för polynom- och potensfunktioner. Vi vill nu hitta deriveringsregler för exponentialfunktioner.

Vi låter $f(x) = a^x$ där $a > 0$, och använder derivatans definition

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} a^x \cdot \frac{a^h - 1}{h} = a^x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

Vi kan inte som med polynom- och potensfunktioner utveckla täljaren, förkorta med h och sedan ta gränsvärdet genom att sätta $h = 0$. Vi fortsätter istället i tre steg.

Steg 1: Genom att undersöka $\lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h}$ för olika a, kan man komma fram till att det finns en bas $e \approx 2{,}718$ för vilken $\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$. Detta betyder att om $f(x) = e^x$ så är

$$f'(x) = f(x) = e^x$$

Dvs **derivatan är samma som funktionen**. e är ett irrationellt tal (precis som π) och kan bestämmas med högre noggrannhet med hjälp av formeln

$$e = \lim_{h\to 0} (h + 1)^{\frac{1}{h}} \approx 2{,}718281828459$$

Steg 2: Om $f(x) = e^{kx}$, där k är ett reellt tal, kan man med hjälp av derivatans definition visa att

$$f'(x) = ke^{kx}$$

Steg 3: Vi introducerar den **naturliga logaritmen**

$$y = e^x \;\Leftrightarrow\; x = \ln y$$

Varje positivt tal a kan därmed skrivas med basen e:

$$a = e^{\ln a}$$

Vi kan nu derivera $f(x) = a^x$ genom att först skriva om den med basen e:

$f(x) = a^x = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{x \ln a}$

$f'(x) = e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a$

Samma **logaritmlagar** gäller som för tiologaritmen:

$\ln(A \cdot B) = \ln A + \ln B$
$\ln\left(\frac{A}{B}\right) = \ln A - \ln B$
$\ln x^p = p \cdot \ln x$

Vi kan nu sammanfatta deriveringsreglerna:

$f(x)$	$f'(x)$
C	0
x^n	nx^{n-1}
e^x	e^x
e^{kx}	ke^{kx}
a^x	$a^x \cdot \ln x$
$A \cdot g(x)$	$A \cdot g'(x)$
$g(x) + h(x)$	$g'(x) + h'(x)$

Exempel: Derivera följande funktioner

a) $f(x) = e^{3x}$

b) $f(x) = 7 \cdot e^{-2,3x}$

c) $f(x) = 2 \cdot 5^x$

d) $f(x) = 4 \cdot e^{-2x} + x^2$

e) $f(x) = \frac{1}{e^{0,2x}} + x - e^2$

---

a) $f'(x) = 3 \cdot e^{3x}$
(4:e deriveringsregel)

b) $f'(x) = 7 \cdot (-2,3) \cdot e^{-2,3x} = -16,1 \cdot e^{-2,3x}$
(4:e och 6:e deriveringsregel)

c) $f'(x) = 2 \cdot 5^x \cdot \ln 5 = \ln(5^2) \cdot 5^x = \ln(25) \cdot 5^x$
(5:e och 6:e regel, samt 3:e logaritmlagen)

d) $f'(x) = -8e^{-2x} + 2x$
(2:a, 4:e, 6:e och 7:e deriveringsregel)

e) $f(x) = e^{-0,2x} + x - e^2$
$f'(x) = -0,2 \cdot e^{-0,2x} + 1$ (e^2 är en konstant)
(1:a, 2:a, 4:e, 6:e och 7:e deriveringsregel)

När vi behöver <u>derivera</u> en **exponentiell modell** är det lämpligt att ha den på formen:
$f(x) = C \cdot e^{kx}$ istället för $f(x) = C \cdot a^x$

Exempel: Vi har från början 2250 bakterier i en skål. Vi häller i ett bakteriedödande medel i skålen och efter 10,0 minuter återstår 977 bakterier.

a) Bestäm en exponentiell modell $N(t)$, där N är antalet bakterier efter t minuter.

b) Efter hur lång tid är det 50 bakterier kvar i skålen?

c) Bestäm $N'(10)$ och tolka resultatet.

d) Vid vilken tidpunkt minskar antalet bakterier momentant med 15 st per minut?

e) Med hur många procent minskar antalet bakterier per minut?

---

a) $N(t) = C \cdot e^{kt}$
$N(0) = 2250$ ger att $C = 2250$ och
$N(10,0) = 977$ ger en ekvation för k:
$977 = 2250 \cdot e^{k \cdot 10,0}$ (dela med 2250)
$\frac{977}{2250} = e^{k \cdot 10,0}$ (logaritmera båda leden)
$\ln \frac{977}{2250} = \ln e^{k \cdot 10,0} = k \cdot 10,0 \ln e = 10,0 \cdot k$
$k = \frac{1}{10,0} \ln \frac{977}{2250} \approx -0,08342$

Vi får att $N(t) = 2250 \cdot e^{-0,08342 \cdot t}$

b) Vi behöver lösa ekvationen
$50 = 2250 \cdot e^{-0,08342 \cdot t}$ (dela med 2250)
$\frac{50}{2250} = e^{-0,08342 \cdot t}$ (logaritmera)
$\ln \frac{50}{2250} = -0,08342 \cdot t$ (lös ut t)
$t = -\frac{1}{0,08342} \ln \frac{50}{2250} \approx 45,6$

Efter ca 46 minuter är det 50 bakterier kvar.

c) $N'(t) = 2250 \cdot (-0,08342) e^{-0,08342 \cdot t}$
$N'(t) = -187,69 \cdot e^{-0,08342 \cdot t}$
$N'(10) = -187,69 \cdot e^{-0,08342 \cdot 10} \approx -81,50$

Efter 10 minuter <u>minskar</u> antalet bakterier med ca 82 st per minut, <u>momentant</u>.

d) Vi måste lösa ekvationen $N'(t) = -15$
Från c) får vi
$-187{,}69 \cdot e^{-0{,}08342 \cdot t} = -15$
Vi får att $t = -\frac{1}{0{,}08342} \ln \frac{15}{187{,}69} \approx 30{,}3$

Efter ca 30 minuter minskar antalet bakterier med 15 st per minut, momentant.

e) Vi måste skriva om $N(t) = C \cdot e^{kt}$ på formen $N(t) = C \cdot a^t$ för att få förändringsfaktorn a:
$C \cdot a^t = C \cdot e^{kt} = C \cdot \left(e^k\right)^t$, dvs
$a = e^k = e^{-0{,}08342} \approx 0{,}9200 = 1 - 0{,}0800$

Antalet bakterier minskar med 8,0 % per minut, dvs $N(t) = 2250 \cdot 0{,}9200^t$.

Derivata och kurvritning

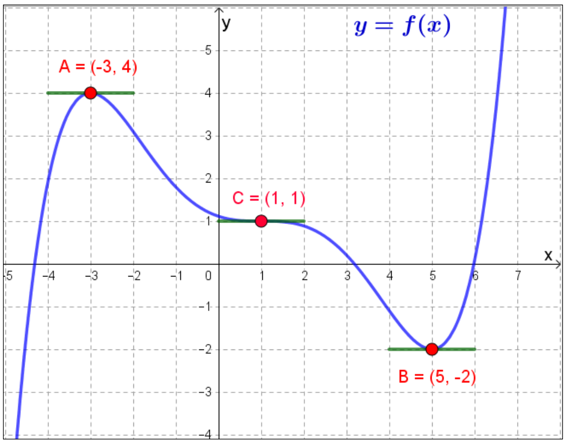
Extrempunkter, extremvärden och terrasspunkter

Funktionen $y = f(x)$ i figuren nedan, har

1. Två **lokala extrempunkter:**
-> En **lokal maximipunkt** $A = (-3{,}4)$ med **extremvärdet (maxvärdet)** $y = 4$
-> En **lokal minimipunkt** $B = (5, -2)$ med **extremvärdet (minvärdet)** $y = -2$.

2. En **terrasspunkt** $C = (1{,}1)$

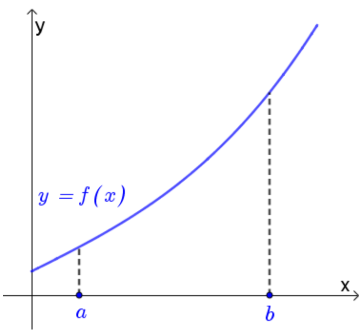
I dessa tre punkter är derivatan noll dvs $\boldsymbol{f'(x) = 0}$, vilket är markerat med de gröna linjerna i figuren.



Växande och avtagande

En funktion $f(x)$ är **strängt växande** i intervallet $a < x < b$ om för alla x_1 och x_2 som ligger i intervallet där $x_2 > x_1$ gäller att $f(x_2) > f(x_1)$.

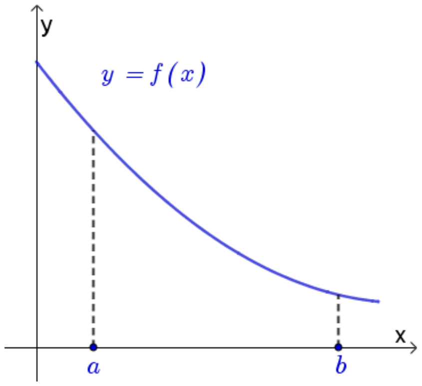
Om $f(x_2) \geq f(x_1)$ så är funktionen **växande.**



Om $f'(x) > 0$ för alla x i intervallet (som i figuren ovan), så är $f(x)$ strängt växande i intervallet. Det omvända gäller dock inte (se exempel längre ner).

En funktion $f(x)$ är **strängt avtagande** i intervallet $a < x < b$ om för alla x_1 och x_2 som ligger i intervallet där $x_2 > x_1$ gäller att $f(x_2) < f(x_1)$.

Om $f(x_2) \leq f(x_1)$ så är funktionen **avtagande.**



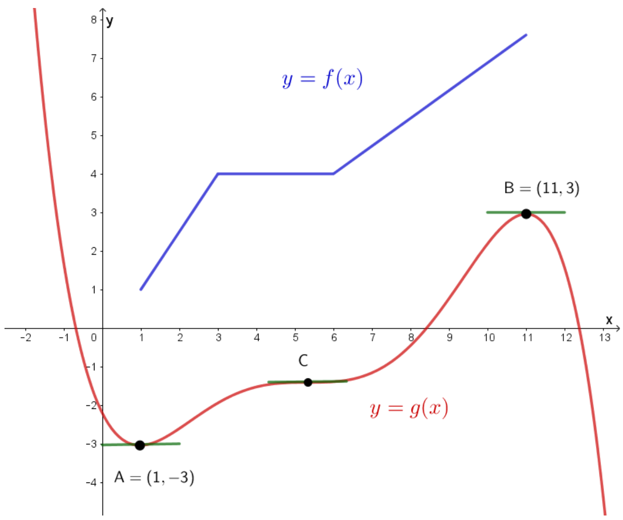
Om $f'(x) < 0$ för alla x i intervallet (som i figuren ovan), så är $f(x)$ strängt avtagande i intervallet. <u>Det omvända gäller dock inte</u>.

Exempel: Funktionen $f(x)$ i figuren nedan är växande i intervallet $1 \leq x \leq 11$. Men den är inte strängt växande p.g.a. platån för $3 < x < 6$, där derivatan är noll.

Funktionen $g(x)$ är strängt växande i intervallet $1 \leq x \leq 11$, trots att funktionen har tre punkter i intervallet där derivatan är noll. Dvs:

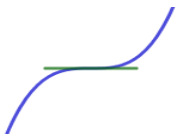
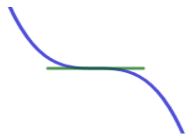
Om $f(x)$ är strängt växande $\nRightarrow$ $f'(x) > 0$. Men

om $f'(x) > 0 \quad \Rightarrow$ att $f(x)$ är strängt växande.

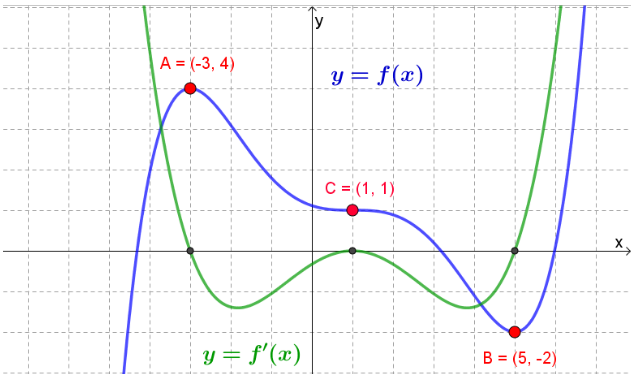


Vi kan nu genom att undersöka <u>derivatans nollställen</u> samt <u>teckenväxlingen</u> runt dem bestämma en funktions extrempunkter och terrasspunkter. Vi kan också bestämma extrempunkternas **karaktär**, dvs om de är maximi- eller minimipunkter:

	Lokal maximipunkt 			Lokal minimipunkt 		
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘	↘		↗

	Terrass 			Terrass 		
$f'(x)$	$+$	0	$+$	$-$	0	$-$
$f(x)$	↗		↗	↘		↘

Exempel: Nedas ser du en graf av funktionen $f(x)$ och dess derivata $f'(x)$, samt ett **teckenstudium**.



x		-3		1		5	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	max $y = 4$	↘	terrass	↘	min $y = -2$	↗

Bestämma extrempunkter, extremvärden och terrasspunkter med derivata

Exempel: Bestäm eventuella extrempunkter, extremvärden och/eller terrasspunkter för funktionen $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 2$.
Skissa också grafen till $y = f(x)$.

Steg 1: Vi bestämmer $f'(x)$

$f'(x) = 3x^2 + 12x + 9$

Steg 2: Vi bestämmer nollställena till $f'(x)$, dvs löser ekvationen $f'(x) = 0$. Det är där extrempunkter och/eller terrasspunkter ligger.

$3x^2 + 12x + 9 = 0$ (bryter ut 3)
$3(x^2 + 4x + 3) = 0$ (nollproduktregeln)
$x^2 + 4x + 3 = 0$ (p-q-formel)
$x = -2 \pm \sqrt{2^2 - 3} = -2 \pm 1$
$x_1 = -3$ och $x_2 = -1$

Dvs, vi har eventuella extrempunkter och/eller terrasspunkter för $x_1 = -3$ och $x_2 = -1$.

Steg 3: Vi bestämmer karaktären med hjälp av ett teckenstudium runt nollställena.

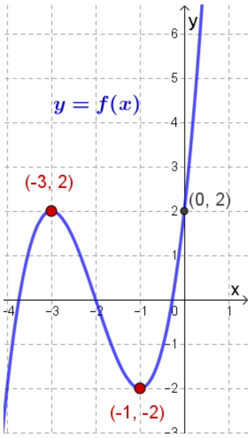
x		-3		-1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	max $y = 2$	$\searrow$	min $y = -2$	$\nearrow$

Vi har testat för derivatans tecken i följande punkter
$f'(-4) = 3 \cdot (-4)^2 + 12 \cdot (-4) + 9 = 9 > 0$
$f'(-2) = 3 \cdot (-2)^2 + 12 \cdot (-2) + 9 = -3 < 0$
$f'(0) = 3 \cdot (0)^2 + 12 \cdot (0) + 9 = 9 > 0$

Steg 4: Vi kan nu bestämma extrempunkter och/eller terrasspunkter samt eventuella extremvärden.

En lokal maximi<u>punkt</u> vid $(-3{,}2)$ med max<u>värdet</u> $y = 2$.
En lokal minimi<u>punkt</u> vid $(-1, -2)$ med min<u>värdet</u> $y = -2$.

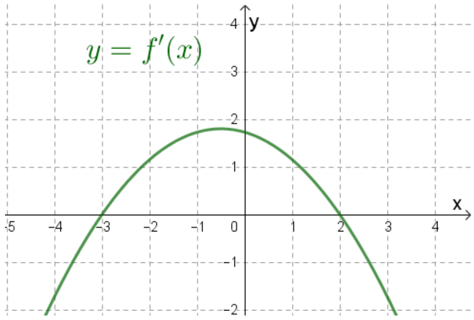
Steg 5: Vi kan nu skissa grafen till $f(x)$ då vi vet extrempunkternas/terrasspunkternas koordinater samt skärningen med y-axeln $f(0)$.



Skärningen med y-axeln:
$f(0) = 2$

<u>Nollställena</u> kan vi inte bestämma, men utifrån extrempunkterna och skärningen med y-axeln kan man få en bra bild om var de kan ligga.

Exempel: I figuren nedan ser du grafen till derivatan $f'(x)$ av en funktion $f(x)$. Bestäm med hjälp av figuren för vilka värden på x som funktionen $f(x)$ har extrempunkter och/eller terrasspunkter. Bestäm också karaktären av eventuella extrempunkter.



Steg 1: $y = f'(x)$ visas i figuren.

Steg 2: Från grafen kan vi bestämma nollställena till derivatan. $f'(x) = 0$ för $x_1 = -3$ och $x_2 = 2$

Steg 3: Vi kan med hjälp av grafen för $f'(x)$ göra ett teckenstudium runt nollställena

x		-3		2	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$

Steg 4: I punkten där $x = -3$ har funktionen $f(x)$ en minpunkt, och vid $x = 2$ har den en maxpunkt.

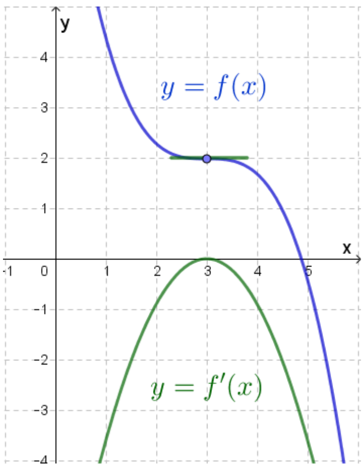
Exempel: Visa att $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - 4x + 7$ saknar extrempunkter och terraspunkter.

Steg 1: $f'(x) = -x^2 - 4$

Steg 2: Vi söker nollställena till $f'(x)$.
$f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; -x^2 - 4 = 0$ eller
$x^2 + 4 = 0$.
Men ekvationen saknar reella nollställen, vilket betyder att $f(x)$ varken har extrempunkter eller terrasspunkter. VSB

(Notera också att $f'(x) = -(x^2 + 4) \leq -4$, dvs $f'(x) < 0$ för alla $x \;\Rightarrow\; f(x)$ är <u>strängt avtagande</u>.)

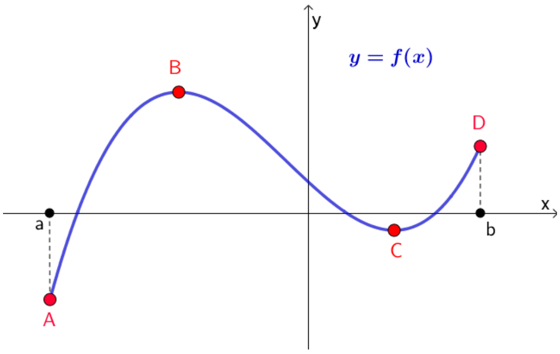
Exempel: I figuren ser vi en funktion $f(x)$, som har en terrasspunkt för $x = 3$, samt dess derivata $f'(x)$.



Derivatan $f'(x)$ **nuddar** x-axeln, vilket <u>gäller alltid</u> när en funktion har en terrasspunkt. Om vi vet att $f(x)$ är ett polynom så vet vi att $f'(x)$ har en faktor $-(x-3)^2$, för att $f'(x)$ har en <u>dubbelrot</u> vid $x = 3$.

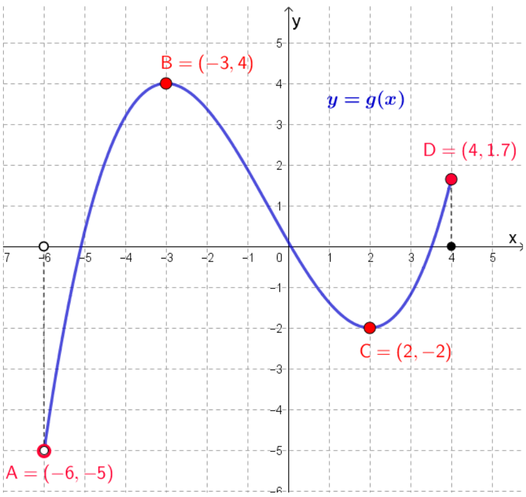
Globala extrempunkter och extremvärden: Största och minsta värdet i ett intervall

Funktionen $f(x)$ i figuren nedan är definierat i intervallet $a \leq x \leq b$.



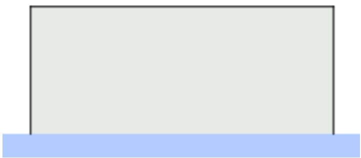
Funktionen $f(x)$ har två lokala maximipunkter B och D, och två lokala minimipunkter A och C. Den har en **global maximipunkt** B (y-koordinaten av B ger det **globala maximivärdet**) och en **global minimipunkt** A (y-koordinaten av A ger det **globala minimivärdet**). Dvs, <u>ändpunkterna</u> kan ingå i extrempunkterna.

Exempel: Funktionen g(x) i figuren nedan är definierat i intervallet $-6 < x \leq 4$. Bestäm från figuren eventuella globala extrempunkter och globala extremvärden.



Funktionen $g(x)$ har två lokala maximipunkter B och D, men <u>bara en lokal minimipunkt</u> C, eftersom punkten $A = (-6, -5)$ inte ingår i definitions- och värdemängden. Den har en **global maximipunkt** $B = (-3,4)$ men <u>saknar **global minimipunkt**</u>. Det **globala maximivärdet** är 4 (= y-värdet av B).

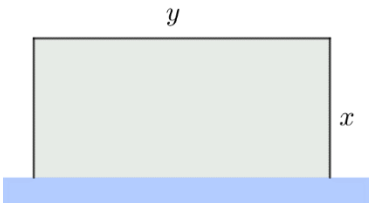
Exempel: En rektangulär hage ska inhägnas mot en sjö med en stängsel som är 320 m lång. Hur stor kan hagens maximala area bli om ingen stängsel behövs mot sjön? Vilka mått har hagen då?



Detta är en **modellerings** uppgift.

I) **Vi översätter först problemet till ett matematiskt problem.**

Vi inför variabler enligt figuren nedan så att de två sidorna är x m respektive y m långa. Arean av hagen är $A\ \mathrm{m}^2$. Notera nu att x, y och A är bara tal.



Vi får då att

$A = x \cdot y$

Vi behöver uttrycka A som en funktion av en av variablerna x eller y, så att vi kan maximera den. Vi utnyttjar att stängseln är 320 m lång:

$2x + y = 320 \ \Rightarrow \ \ y = 320 - 2x$

Vi får då A som funktion av x:

$A(x) = x(320 - 2x) = 320x - 2x^2$

Innan vi kan maximera $A(x)$ så måste vi veta i vilket intervall detta skall göras, dvs vi behöver definitionsmängden. x och $y = 320 - 2x$ anger längder som måste vara positiva:

$x > 0$ och $y = 320 - 2x > 0 \ \Rightarrow x < 160$

Definitionsmängden är alltså $0 < x < 160$.

Nu har vi översatt uppgiften till ett matematiskt problem:

Bestäm det maximala värdet av funktionen $A(x) = 320x - 2x^2$ i intervallet $0 < x < 160$.

II) **Vi löser nu det matematiska problemet.**

Steg 1: $A'(x) = 320 - 4x$

Steg 2: Vi söker nollställena till derivatan $A'(x) = 0$:
$320 - 4x = 0 \ \Rightarrow x = 80$

Steg 3: Vi gör ett teckenstudium inom intervallets gränser för att hitta största värdet.

x	0		80		160
$A'(x)$		$+$	0	$-$	
$A(x)$	0	↗	max 12 800	↘	0

($A'(10) = 280 > 0$ och $A'(100) = -80 < 0$)

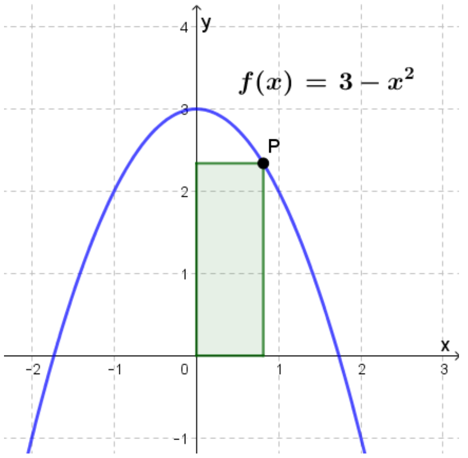
Steg 4: Vi får att $A_{max} = 12\,800$ för $x = 80$ och $y = 320 - 2x = 160$

Vi har nu löst det matematiska problemet.

III) Vi återvänder till det utsprungliga problemet och tolkar vårt resultat.

Hagens maximala area är 12 800 m^2 om kortsidorna är 80 m långa och långsidan är 160 m lång.

Exempel: När punkten P flyttas längs kurvan $y = f(x) = 3 - x^2$, i första kvadranten så ändras den markerade rektangelns area. Bestäm det största värdet som denna area kan anta.



I) Vi översätter först problemet till ett matematiskt problem.
$P = (x, f(x)) = (x, 3 - x^2)$. Om vi låter x le vara längden av rektangeln bas så är rektangelns höjd $(3 - x^2)$ le. Rektangelns area A a.e. kan nu uttryckas som en funktion av x:
$A(x) = x \cdot (3 - x^2) = 3x - x^3$

Eftersom P ligger i första kvadranten så är definitionsmängden: $0 < x < \sqrt{3}$ ($x \neq 0$ eller 3 för då har vi ingen rektangel). Vi har översatt problemet till ett matematiskt problem: Vi ska maximera $A(x) = 3x - x^3$ i intervallet $0 < x < \sqrt{3}$.

II) Vi löser nu det matematiska problemet.

Steg 1: $A'(x) = 3 - 3x^2 = 3(1 - x^2)$

Steg 2: Vi söker nollställena till derivatan: $A'(x) = 0$
Vi får att $1 - x^2 = 0$ som ger lösningarna $x_1 = -1$ och $x_2 = 1$. Men $x_1 = -1$ ligger utanför definitionsmängden och är därmed ointressant.

Steg 3: Vi söker största värdet i intervallet med hjälp av teckenstudium. När vi söker extrempunkterna av en funktion i ett intervall är det bra, förutom nollställena till derivatan, att även ha med intervallets gränser på x-raden.

x	0		1		$\sqrt{3} \approx 1{,}7$
$A'(x)$		$+$	0	$-$	
$A(x)$	0	$\nearrow$	max 2	$\searrow$	0

Derivatans tecken: $A'(0{,}5) > 0$ och $A'(1{,}5) < 0$

Steg 4: Största värdet av A är 2 för $x = 1$.

III) Vi återvänder till det utsprungliga problemet som här handlade om areor.

Den maximala arean av rektangeln är 2 a.e.

Andra derivatan och grafens utseende

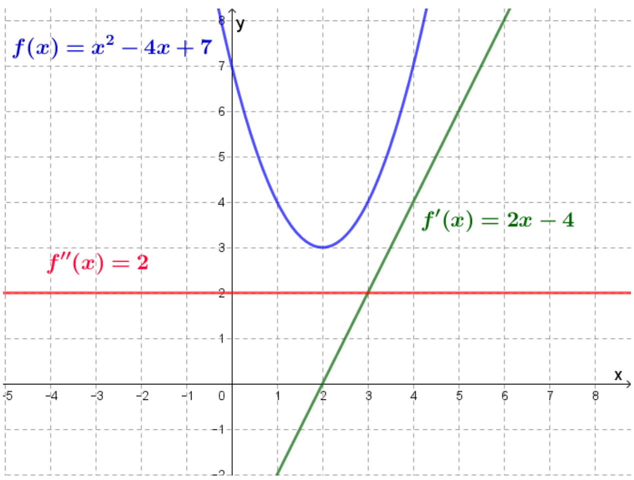
Derivatan $f'(x)$ av funktionen $y = f(x)$ kan även betecknas med y', $\frac{df}{dx}$ eller Df.

Vi kan derivera en funktion flera gånger och därför kallas $f'(x)$, **1:a derivatan** av $f(x)$. **2:a derivatan** betecknas $f''(x)$ (y'' eller $\frac{d^2f}{dx^2}$).

Exempel: Bestäm 1:a och 2:a derivatan av
a) $f(x) = x^2 - 4x + 7$.
b) $g(x) = -x^2 + 4x - 1$

a) $f'(x) = 2x - 4$ och $f''(x) = 2$

Vi ritar alla kurvorna i samma graf:

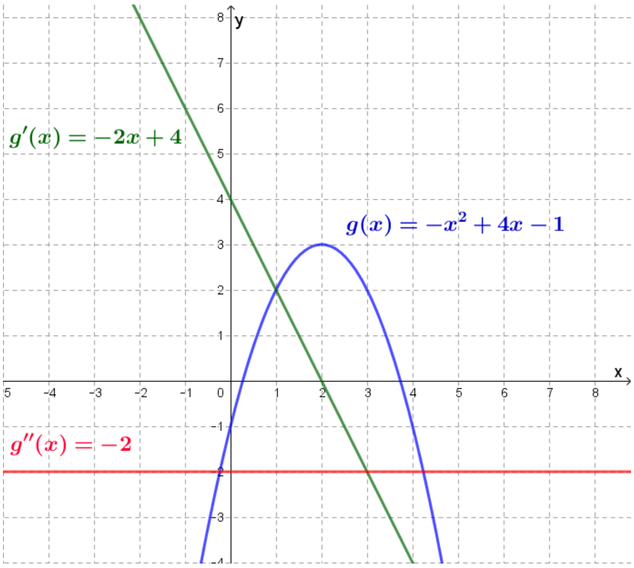


Om man ritar en tangent på kurvan $y = f(x)$ så ligger grafen ovanför tangenten. Man säger då att funktionen $f(x)$ är **konvex**. För en konvex funktion ökar lutningen (dvs $f'(x)$) när x ökar. $f'(x)$ är därmed <u>växande</u> vilket betyder att derivatan av $f'(x)$, dvs $f''(x) \geq 0$. För funtionen i vårt exempel ovan gäller det att $f''(x) = 2 > 0 \quad \Rightarrow \; f'(x)$ är strängt växande.

Observera också att om en kurva har en lokal <u>minimipunkt</u> (som $f(x)$ ovan) så är kurvan <u>konvex</u> runt den punkten.

b) $g'(x) = -2x + 4$ och $g''(x) = -2$

Vi ritar kurvorna i samma graf



Om man ritar en tangent på kurvan $y = g(x)$ så ligger grafen <u>nedanför</u> tangenten. Man säger då att funktionen $g(x)$ är **konkav**. För en konkav funktion minskar lutningen (dvs $g'(x)$) när x ökar. $g'(x)$ är därmed <u>avtagande</u> vilket betyder att derivatan av $g'(x)$, dvs $g''(x) \leq 0$. För funtionen i vårt exempel ovan gäller det att $g''(x) = -2 < 0 \quad \Rightarrow \; g'(x)$ är strängt avtagande.

Observera också att om en kurva har en lokal <u>maximipunkt</u> (som $g(x)$ ovan) så är kurvan <u>konkav</u> runt den punkten.

Eftersom $f''(x) \geq 0$ när kurvan är konvex och $f''(x) \leq 0$ om kurvan är konkav, så följer det att $f''(x) = 0$ i <u>den punkt</u> på kurvan där den ändrar från konvex till konkav (eller tvärtom). Den punkten kallas för funktionens **inflektionspunkt**.

Exempel: Funktionen $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + 3x - 3$ <u>har en inflektionspunkt</u>.

a) Bestäm inflektionspunktens koordinater.
b) Bestäm det intervall där funktionen är konvex respektive konkav.

---

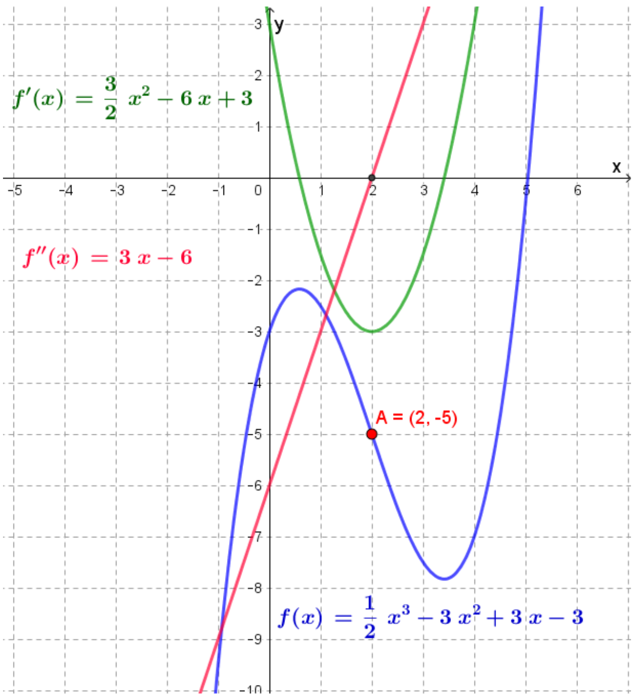
a) $f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + 3$ och $f''(x) = 3x - 6$

Eftersom $y = f(x)$ <u>har en inflektionspunkt</u> så måste $f''(x) = 0$ i punkten: $3x - 6 = 0$ dvs $x = 2$. Inflektionspunktens koordinater ges av $\big(2, f(2)\big) = (2, -5)$

b) Från $f''(x) = 3x - 6$ ser vi att $f''(x) > 0$ för $x > 2$ och $f''(x) < 0$ för $x < 2$.

Dvs $f(x)$ är konvex för $x > 0$ och konkav för $x < 2$.

Figuren nedan visar grafen till $f(x), f'(x)$ och $f''(x)$



Notera att en **terrasspunkt är en inflektionspunkt**. Så om $y = f(x)$ har en terrasspunkt där $x = a$, så gäller det att $f''(a) = 0$.

Vi kan sammanfatta resultatet från de två exemplen ovan i en tabell:

Om $f(x)$ är <u>konvex</u> i ett intervall (exempelvis om funktionen har en <u>minimipunkt</u>)	$\Longrightarrow$ $f''(x) \geq 0$ i intervallet
Om $f(x)$ är <u>konkav</u> i ett intervall (exempelvis om funktionen har en <u>maximipunkt</u>)	$\Longrightarrow$ $f''(x) \leq 0$ i intervallet
Om $f(x)$ har en <u>inflektionspunkt</u> (exempelvis om funktionen har en <u>terrasspunkt</u>)	$\Longrightarrow$ $f''(x) = 0$ i punkten

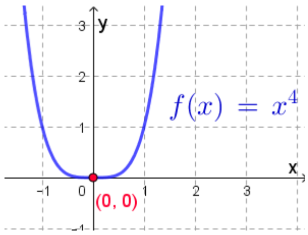
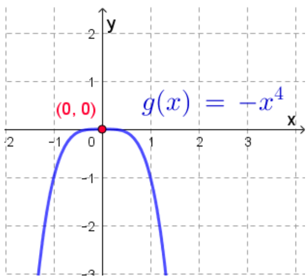
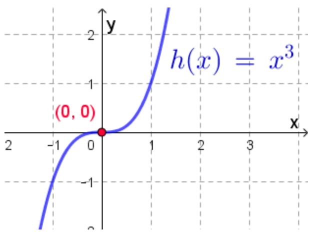
Eftersom i alla tre fall ovan kan $f''(x) = 0$, så följer det att om $f''(x) = 0$ i en punkt så kan vi <u>inte avgöra</u> om det är en inflektionspunkt, eller att kurvan är konvex eller konkav runt punkten.

Vi ska nu använda resultatet ovan för att bestämma extrempunkterna med hjälp av $f''(x)$ <u>istället för med teckenstudium</u>:

Låt oss nu säga att $x = a$ är ett nollställe till $f'(x)$, dvs $f'(a) = 0$. Vid $x = a$ kan då antingen finnas en extrempunkt ($f(x)$ är då konkav vid max och konvex vid min) eller en terrasspunkt (inflektionspunkt). Om $f''(a) = 0$, så kan vi inte (som vi såg ovan) avgöra om det är en extrempunkt eller en teraspunkt. Vi får då följande regler:

Om $f''(a) > 0$	$\Longrightarrow$	Minimipunkt vid $(a, f(a))$
Om $f''(a) < 0$	$\Longrightarrow$	Maximipunkt vid $(a, f(a))$
Om $f''(a) = 0$	$\Longrightarrow$	Max, min eller terrass vid $(a, f(a))$ **Dvs, vi måste göra ett <u>teckenstudium</u> för att avgöra**

Exempel: Vi ger exempel av det tredje fallet då 2:a derivatan är noll vid eventuell extrempunkt eller terrasspunkt. I alla dessa fall skulle vi behöva göra ett <u>teckenstudium</u> för att avgöra. GÖR DET! och visa att påståendena nedan om minpunkt, maxpunkt och terrasspunkt stämmer.

 $f'(x) = 4x^3$: nollställe vid $x = 0$ $f''(x) = 12x^2$	$f(x) = x^4$ har <u>minpunkt</u> vid $(0,0)$ och $f''(0) = 0$
 $g'(x) = -4x^3$: nollställe vid $x = 0$ $g''(x) = -12x^2$	$g(x) = -x^4$ har <u>maxpunkt</u> vid $(0,0)$ och $g''(0) = 0$
 $h'(x) = 3x^2$: nollställe vid $x = 0$ $h''(x) = 6x$	$h(x) = x^3$ har <u>terrasspunkt</u> vid $(0,0)$ och $h''(0) = 0$

Exempel: Bestäm eventuella extrempunkter och/eller terrasspunkter till funktionen

$$f(x) = -x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 6x + 15$$

Steg 1: $f'(x) = -3x^2 + 3x + 6 = -3(x^2 - x - 2)$

Steg 2: $f'(x) = 0$ ger

$x^2 - x - 2 = 0$ (p-q-formeln)

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$$

Vi får att $x_1 = -1$ och $x_2 = 2$

Steg 3: Vi använder 2:a derivatan istället för teckenstudium.

$f''(x) = -6x + 3$

$x_1 = -1$: $f''(-1) = 9 > 0 \Rightarrow$ Minimum, dvs $y_{min} = f(-1) = 11{,}5$

$x_2 = 2$: $f''(2) = -9 < 0 \Rightarrow$ Maximum, dvs $y_{\max} = f(2) = 25$

Steg 4:

Lokal minimipunkt vid $\left(-1, f(-1)\right) = (-1; 11{,}5)$

Lokal maximipunkt vid $\left(2, f(2)\right) = (2; 25)$

Exempel: Bestäm eventuella extrempunkter till $f(x) = e^x - 5x + 4$, samt skissa dess graf.

Steg 1: $f'(x) = e^x - 5$

Steg 2: $f'(x) = 0$ ger

$e^x - 5 = 0$ (+5 i båda leden)

$e^x = 5$ (logaritmera)

$x = \ln 5$

Steg 3: Vi använder 2:a derivatan

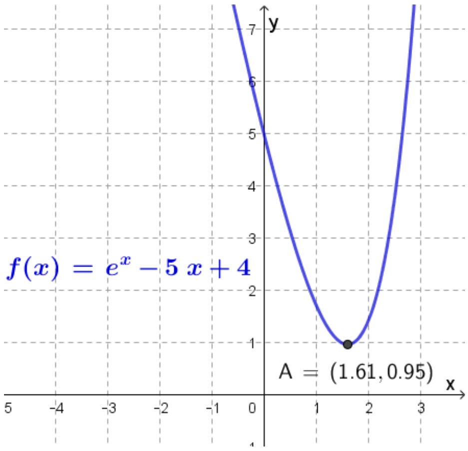
$f''(x) = e^x > 0 \Rightarrow$ Minimum vid $x = \ln 5$

Steg 4: Funktionen har en <u>global</u> minimipunkt vid $A = (\ln 5, f(\ln 5)) = \left(\ln 5, e^{\ln 5} - 5\ln 5 + 4\right) = (\ln 5, 5 - \ln 5^5 + 4) = (\ln 5, 9 - \ln 5^5) \approx (1{,}6; 0{,}95)$ dvs

$A = (\ln 5, 9 - \ln 5^5) \approx (1{,}6; 0{,}95)$

Steg 5: Skärningen med y-axeln: $f(0) = e^0 + 4 = 5$

Vi kan nu skissa grafen till $y = f(x)$:



Exempel (<u>Svår</u>): $f(x) = ax^2 + bx + c$, där $a \neq 0$ är en godtycklig andragradsfunktion. Visa att om $a > 0$ så har kurvan en minimipunkt, och om $a < 0$ så har kurvan en maximipunkt. Visa också att extrempunkten har koordinaterna $(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a})$

Steg 1: $f'(x) = 2ax + b$

Steg 2: $f'(x) = 0$ ger att $2ax + b = 0$ dvs $x = -\frac{b}{2a}$

Steg 3: $f''(x) = 2a$ (konstant, dvs oberoende av x)

Om $a > 0 \Rightarrow f''(x) = 2a > 0 \Rightarrow$ Minimipunkt

Om $a < 0 \Rightarrow f''(x) = 2a < 0 \Rightarrow$ Maximipunkt

Steg 4:

Om $a > 0 \Rightarrow$ Minimipunkt vid $(-\frac{b}{2a}, f(-\frac{b}{2a}))$

Om $a < 0 \Rightarrow$ Maximipunkt vid $(-\frac{b}{2a}, f(-\frac{b}{2a}))$

Extrempunktens koordinater:

$$(-\frac{b}{2a}, f(-\frac{b}{2a})) =$$

$$\left(-\frac{b}{2a}, a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c\right) =$$

$$\left(-\frac{b}{2a}, a \cdot \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c\right) =$$

$$\left(-\frac{b}{2a}, \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c\right) =$$

$$\left(-\frac{b}{2a}, \frac{b^2}{4a} - \frac{2b^2}{4a} + c\right) = (-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}) \text{ VSB}$$

Primitiva funktioner och Integraler

Primitiv funktion (det omvända av derivata)

$F(x)$ är en **primitiv funktion** till $f(x)$ om
$F'(x) = f(x)$

Exempel:
a) $F(x) = x^2$ är en primitiv funktion till $f(x) = 2x$, eftersom $F'(x) = 2x = f(x)$

b) $F(x) = \frac{x^2}{2}$ är en primitiv funktion till $f(x) = x$, eftersom $F'(x) = \frac{2x}{2} = x = f(x)$

c) $F(x) = \frac{x^2}{2} + 5$ är också en primitiv funktion till $f(x) = x$, eftersom $F'(x) = x = f(x)$

d) $F(x) = \frac{x^2}{2} + C$, där C är en godtycklig konstant, ger samtliga primitiva funktioner till $f(x) = x$.

Eftersom vi alltid kan addera en godtycklig konstant C till en primitiv funktion $F(x)$ (C droppar ju bort när vi deriverar $F(x)$), så innebär det att en funktion har **oändligt många primitiva funktioner**.

Exempel:
a) $F(x) = \frac{x^3}{3} + 7$ är en primitiv funktion till $f(x) = x^2$, eftersom $F'(x) = \frac{3x^2}{3} = x^2 = f(x)$

b) $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$, där C är en godtycklig konstant, ger samtliga primitiva funktioner till $f(x) = x^2$

Exempel:
a) $F(x) = e^x$ är en primitiv funktion till $f(x) = e^x$, eftersom $F'(x) = e^x = f(x)$

b) $F(x) = e^x + C$, där C är en godtycklig konstant, ger samtliga primitiva funktioner till $f(x) = e^x$

Exempel:
a) $F(x) = \frac{e^{2x}}{2}$ är en primitiv funktion till $f(x) = e^{2x}$, eftersom $F'(x) = \frac{2e^{2x}}{2} = e^{2x} = f(x)$

b) $F(x) = \frac{e^{2x}}{2} + C$, där C är en godtycklig konstant, ger samtliga primitiva funktioner till $f(x) = e^{2x}$

Exempel: Bestäm samtliga primitiva funktioner till $f(x) = \frac{1}{x^3}$

Vi skriver först om $f(x)$ i **potensform**:
$f(x) = \frac{1}{x^3} = x^{-3}$. Vi får då att

$F(x) = \frac{x^{-2}}{-2} + C$, eftersom

$$F'(x) = \frac{(-2)x^{-3}}{-2} = x^{-3} = f(x)$$

Vi skriver om $F(x)$:

$$F(x) = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C$$

Observera att $f(x)$ är en primitiv funktion till $f'(x)$.

Vi kan generalisera våra exempel ovan så att vi får följande tabell:

$f(x)$	$F(x)$
0	C
1	$x + C$
$x^n,\ n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
e^{kx}	$\frac{e^{kx}}{k} + C$

Notera att vi **inte kan bestämma en primitiv funktion till** $f(x) = x^{-1}$ med metoden ovan, då nämnaren i $F(x)$ blir noll ($n + 1 = -1 + 1 = 0$). Det är först i Ma 4 som vi kommer att kunna bestämma den primitiva funktionen till $f(x) = x^{-1}$.

Exempel: Visa att $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $(n \neq -1)$ ger samtliga primitiva funktioner till $f(x) = x^n$

$F'(x) = \frac{(n+1)x^{(n+1)-1}}{n+1} = x^n$ VSB
(Vi har använt deriveringsregeln att om en funktion $g(x) = x^a \;\Rightarrow\; g'(x) = ax^{a-1}$, där $a = n + 1$)

Exempel: Bestäm samtliga primitiva funktioner till

a) $f(x) = 3$ b) $f(x) = 5x - 4$ c) $f(x) = 2e^{3x}$

a) $F(x) = 3x + C$
b) $F(x) = \frac{5x^2}{2} - 4x + C$
c) $F(x) = \frac{2e^{3x}}{3} + C$

Exempel: Bestäm samtliga primitiva funktioner till

a) $f(x) = -10x^4 + 7x^2 - x$ b) $f(x) = 3\sqrt{x}$

a) $F(x) = -\frac{10x^5}{5} + \frac{7x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + C$
$F(x) = -2x^5 + \frac{7x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + C$

b) $f(x) = 3x^{\frac{1}{2}}$ ($f(x)$ **i potensform först!**)

$$F(x) = \frac{3x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{3x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = 2x^{\frac{3}{2}} + C$$

Eller

$F(x) = 2x\sqrt{x} + C$ (VISA DET!)

Primitiva funktioner med villkor

Exempel: Bestäm den primitiva funktionen $F(x)$ till $f(x) = 2e^{3x} - x^2$ sådan att $F(0) = 0$.

Vi måste först bestämma samtliga primitiva funktioner till $f(x)$: $F(x) = \frac{2e^{3x}}{3} - \frac{x^3}{3} + C$

Villkoret $F(0) = 0$ ger

$$\frac{2e^{3\cdot 0}}{3} - \frac{0^3}{3} + C = 0$$

$$\frac{2}{3} + C = 0 \quad \Rightarrow C = -\frac{2}{3}$$

Dvs, $F(x) = \frac{2e^{3x}}{3} - \frac{x^3}{3} - \frac{2}{3}$

När en kropp rör sig längs en linje så kan dess **läge** s meter (från en vald origo) anges som en funktion av tiden t sekunder: $s(t)$

Kroppens **hastighet** v m/s som funktion av tiden t s är derivatan av $s(t)$:

$v(t) = s'(t)$

$s(t)$ är då en <u>primitiv funktion</u> till $v(t)$.

Kroppens **acceleration** a m/s^2 som funktion av tiden t s är derivatan av hastigheten $v(t)$, eller <u>andra derivatan</u> av $s(t)$:

$a(t) = v'(t) = s''(t)$

$v(t)$ är då en <u>primitiv funktion</u> till $a(t)$.

Exempel: En kropp rör sig längs en rät linje och dess läge s meter som funktion av tiden t sekunder ges av $s(t) = 10 + 15t - 2t^2$. Bestäm

a) kroppens läge från början (dvs, när tidräkningen börjar).
b) kroppens hastighet från början.
c) kroppens hastighet efter 5,0 sekunder.
d) kroppens acceleration som funktion av tiden.

a) Kroppens läge från början ges av $s(0) = 10$. Dvs, kroppens läge är +10 m från origo.
b) $v(t) = s'(t) = 15 - 4t$, vilket ger att $v(0) = 15$. Dvs, kroppens hastighet från början är +15 m/s (kroppen rör sig i positiv riktning).
c) Hastigheten efter 5,0 s: $v(5) = 15 - 4 \cdot 5 = -5$. Dvs, kroppens hastighet efter 5,0 s är -5 m/s. Kroppen har alltså vänt och den rör sig i negativ rikning med 5 m/s.
d) $a(t) = v'(t) = -4$. Dvs kroppens acceleration är konstant på -4 m/s^2.

Exempel: En kropps acceleration a m/s^2 ges av $a(t) = 2{,}0 + 0{,}5 \cdot t$ där t är tiden i sekunder. Bestäm kroppens hastighet $v(t)$ om kroppen har från början en hastighet på -10 m/s.

$v(t)$ är en primitiv funktion till $a(t)$. Vi får:

$$v(t) = 2{,}0 \cdot t + \frac{0{,}5 \cdot t^2}{2} + C = 2{,}0 \cdot t + \frac{t^2}{4} + C$$

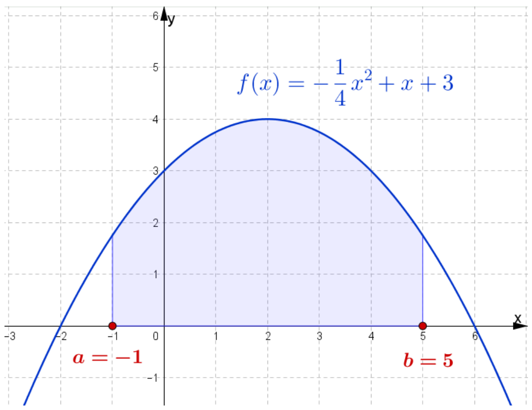
Villkoret $v(0) = -10$ ger att $C = -10$. Dvs

$$v(t) = \frac{t^2}{4} + 2{,}0 \cdot t - 10$$

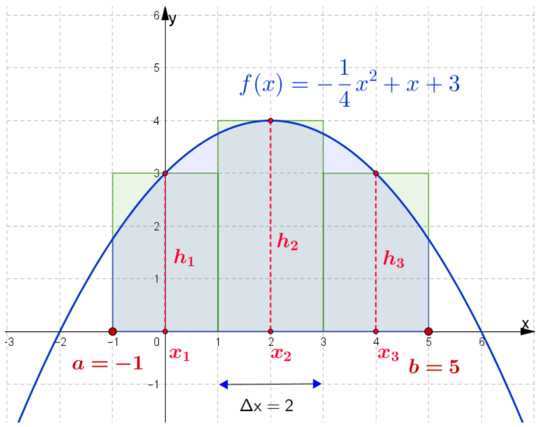
Integraler

Man kan använda **integraler** för att bland annat beräkna **arean** mellan en kurva och x-axeln. Vi ska använda denna relation för att definiera begreppet integral.

I figuren nedan ser du den markerade arean mellan kurvan $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x + 3$ och x-axeln mellan $x = -1$ och $x = 5$. Hur ska vi bestämma arean?



Vi börjar först med att **uppskatta arean** genom att dela in den i rektanglar som i figuren nedan. Vi har delat in intervallet $-1 \leq x \leq 5$ i 3 lika stora delintervall med bredden $\Delta x = \frac{b-a}{3} = \frac{5-(-1)}{3} = 2$. Alla rektanglar har då en bas på 2 längdenheter.



Höjden h l.e. av rektanglarna är lika med funktionens värde $f(x)$ i **mitten av intervallet** (som i figuren markerats med x_1, x_2 och x_3):

$h_1 = f(x_1)$, $h_2 = f(x_2)$ och $h_3 = f(x_3)$

Vi kan nu uppskatta arean A areaenheter av området genom att addera arean av rektanglarna:

$$A \approx f(x_1) \cdot \Delta x + f(x_2) \cdot \Delta x + f(x_3) \cdot \Delta x = f(0) \cdot 2 + f(2) \cdot 2 + f(4) \cdot 2 = 19{,}99$$

Dvs arean är ca 20,0 a.e.

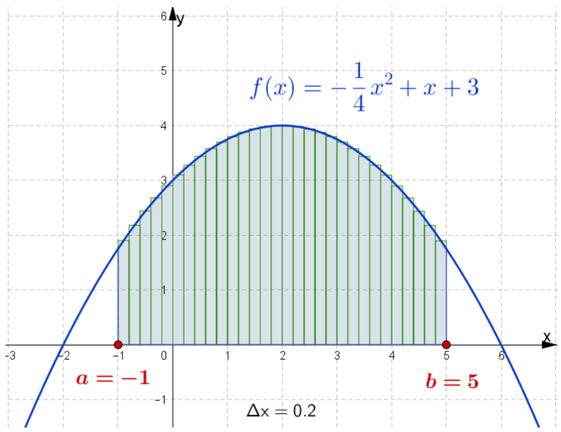
Vi kan få ett bättre värde genom att dela in intervallet i flera delintervall. Om vi delar in intervallet i N delintervall så får vi att

$$A \approx f(x_1) \cdot \Delta x + f(x_2) \cdot \Delta x + \cdots + f(x_N) \cdot \Delta x$$

Där $\Delta x = \frac{b-a}{N}$. Genom att använda summatecknet Σ, kan vi skriva summan ovan på ett enklare sätt:

$$A \approx \sum_{i=1}^{N} f(x_i) \cdot \Delta x$$

Med $N = 30$ får vi att $\Delta x = 0{,}2$ och $A \approx 19{,}5$:



Det exakta värdet på A får vi genom ett gränsvärde där $N \to \infty$ (notera att $\Delta x = \frac{b-a}{N} \to 0$ när $N \to \infty$):

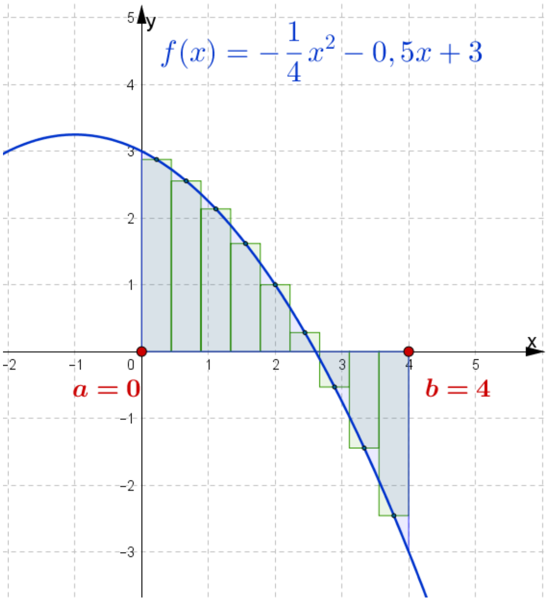
$$A = \lim_{N \to \infty} \sum_{i=1}^{N} f(x_i) \cdot \Delta x$$

Detta gränsvärde kallas för **integralen** av $f(x)$ från $x = a$ till $x = b$ och betecknas som nedan:

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{i=1}^{N} f(x_i) \cdot \Delta x = \int_a^b f(x)\, dx$$

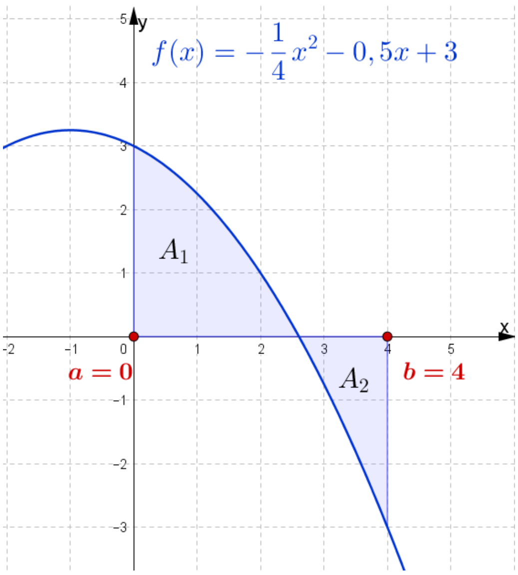
$\int$ är **integraltecknet**, a är **nedre integrationsgränsen**, b är **övre integrationsgränsen** och $f(x)$ är **integranden**. dx anger att vi integrera med avseende på variabeln x.

Eftersom integralen är en summa av termer på formen $f(x_i) \cdot \Delta x$, så innebär det att om kurvan är under x-axeln kommer $f(x_i)$ att vara **negativt** och därmed kommer $f(x_i) \cdot \Delta x$ att vara **negativt**. **Dvs, de rektanglar som är under x-axeln bidrar negativt i summan**. I exemplet nedan kommer $f(x_7) \cdot \Delta x + f(x_8) \cdot \Delta x + f(x_9) \cdot \Delta x$, att bidra negativt.

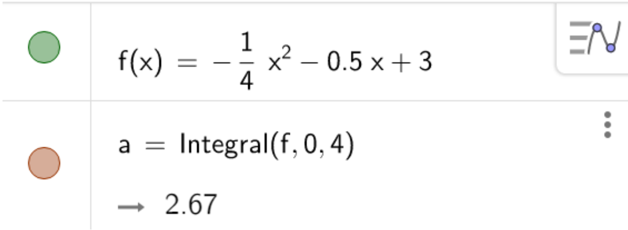


Om arean av området ovanför x-axeln är A_1 a.e. och under x-axeln A_2 a.e. så är integralen

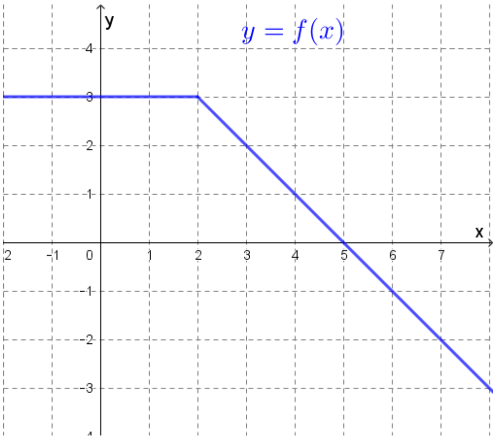
$$\int_0^4 f(x)\,dx = A_1 - A_2$$



Man kan beräkna integraler med hjälp av ett digitalt verktyg som GeoGebra:

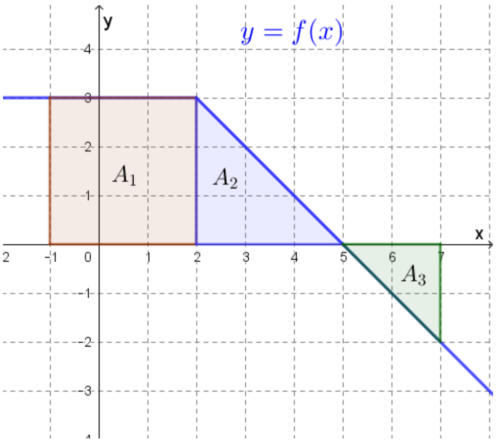


Exempel: Figuren nedan visar grafen till $y = f(x)$. Bestäm $\int_{-1}^{7} f(x)\,dx$.



Om vi betecknar storleken av areorna enligt figuren nedan får vi att

$$\int_{-1}^{7} f(x)\,dx = A_1 + A_2 - A_3 = 9 + 4{,}5 - 2 = 11{,}5$$



Observera att en integral har i allmänhet ingen enhet. Dvs svaret på uppgiften är 11,5 och <u>inte</u> 11,5 a.e.

Integraler och primitiva funktioner

Vi har definierat vad en integral är, men hur beräknar vi den? Det gör vi med hjälp av primitiv funktion:

Integralkalkylens fundamentalsats

Om $F(x)$ är en primitiv funktion till $f(x)$ så är

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

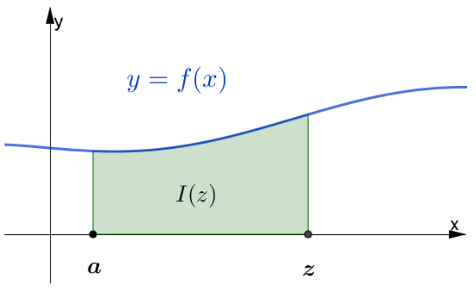
$[F(x)]_a^b$ är en förkortning av $F(b) - F(a)$

Bevis (svår): Vi vill bestämma

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

Vi byter nu variabel och ersätter $b \to z$. Vi låter nu a vara en konstant men vi varierar z så att I blir en funktion av z:

$$I(z) = \int_a^z f(x)\,dx$$



Det följer från ovan att $I(a) = 0$.

Vi ska först visa att $I(z)$ är en primitiv funktion till $f(z)$. Dvs $I'(z) = f(z)$. Från derivatans definition

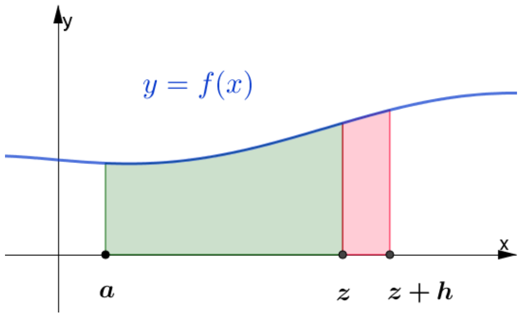
$$I'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{I(z+h) - I(z)}{h}$$

får vi, för små värden på h, att

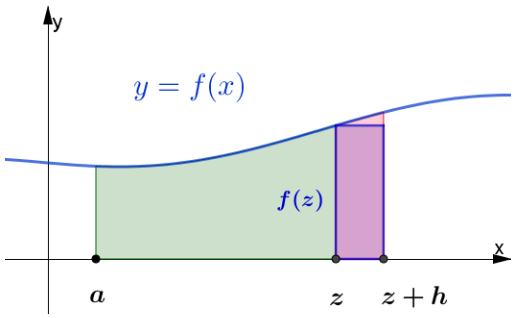
$$I'(z) \approx \frac{I(z+h) - I(z)}{h} \qquad \text{(multiplicera med } h\text{)}$$

$$\Delta I = I(z+h) - I(z) \approx I'(z) \cdot h$$

I figuren nedan är det rödmarkerade området lika med $\Delta I = I(z+h) - I(z)$.



Men för små värden på h är ΔI ungefär lika med den markerade rektangelns area i figuren nedan:



Dvs $\Delta I = I(z+h) - I(z) \approx f(z) \cdot h$

Vi har tidigare visat att $\Delta I \approx I'(z) \cdot h$ och vi får att

$$I'(z) = f(z)$$

Det betyder att $I(z)$ är en primitiv funktion till $f(z)$. Om $F(z)$ är en primitiv funktion till $f(z)$ så ger $F(z) + C$, där C är en konstat, samtliga primitiva funktioner till $f(z)$. Vi får att

$$I(z) = F(z) + C$$

$I(z)$ måste uppfylla villkoret $I(a) = 0$ vilket ger

$0 = F(a) + C \;\Rightarrow C = -F(a)$, dvs

$$I(z) = F(z) - F(a) = \int_a^z f(x)\,dx$$

Vi sätter nu tillbaka $z = b$ och får att

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{VSB}$$

Exempel: Beräkna integralerna

a) $\int_{-2}^{3}(2x+4)dx$ b) $\int_{0}^{2} e^{3x}dx$ c) $\int_{-2}^{2}(x^2-2x)dx$

$$a)\ \int_{-2}^{3}(2x+4)dx = [x^2+4x]_{-2}^{3}$$

$$= 3^2 + 4\cdot 3 - ((-2)^2 + 4(-2))$$

$$= 21 - (-4) = 25$$

Glöm inte den röda parentesen.

$$b)\ \int_{0}^{2} e^{3x}dx = [\frac{e^{3x}}{3}]_0^2 = \frac{e^{3\cdot 2}}{3} - \frac{e^{3\cdot 0}}{3} = \frac{e^6}{3} - \frac{1}{3}$$

$$\approx 134{,}1$$

$$c)\ \int_{-2}^{2}(x^2-2x)dx = [\frac{x^3}{3} - x^2]_{-2}^{2}$$

$$= \frac{2^3}{3} - 2^2 - \left(\frac{(-2)^3}{3} - (-2)^2\right)$$

$$= \frac{8}{3} - 4 - \left(-\frac{8}{3} - 4\right)$$

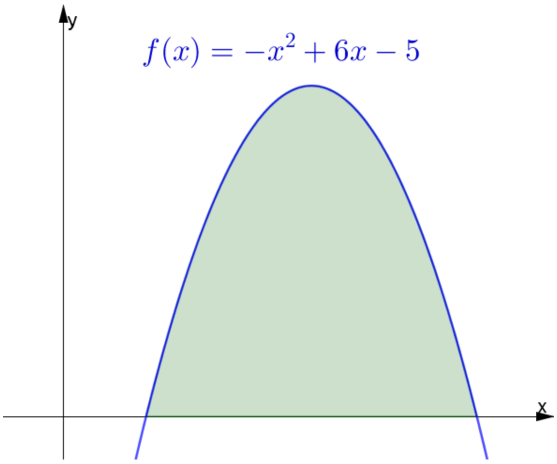
$$= \frac{8}{3} - 4 + \frac{8}{3} + 4 = \frac{16}{3}$$

Exempel: Bestäm exakt $\int_1^3 \frac{1}{x^2}dx$

$$\int_1^3 \frac{1}{x^2}dx = \int_1^3 x^{-2}dx = [-x^{-1}]_1^3 = [-\frac{1}{x}]_1^3$$

$$= -\frac{1}{3} - (-\frac{1}{1}) = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$$

Exempel: Bestäm arean av det markerade området.



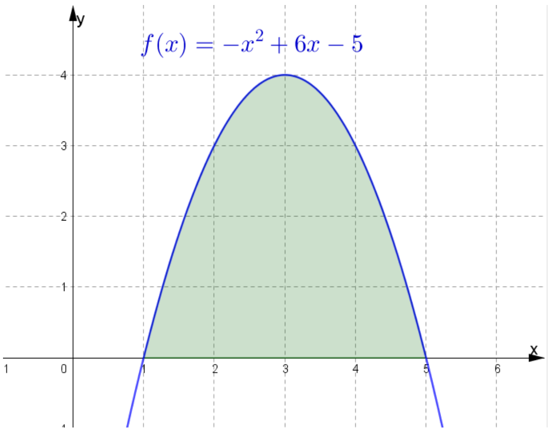
Vi måste först hitta integrationsgränserna, som ges av nollställena till funktionen $f(x) = -x^2 + 6x - 5$

$-x^2 + 6x - 5 = 0$ (bryt ut -1)

$-(x^2 - 6x + 5) = 0$

$x^2 - 6x + 5 = 0$ (p-q-formel)

$x = 3 \pm \sqrt{3^2 - 5} = 3 \pm 2 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 5$



Vi kan nu räkna arean A a.e. av området

$$A = \int_1^5 (-x^2 + 6x - 5)dx = [-\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 5x]_1^5$$

$$= -\frac{5^3}{3} + 3\cdot 5^2 - 5\cdot 5 - \left(-\frac{1^3}{3} + 3\cdot 1^2 - 5\cdot 1\right)$$

$$= \frac{32}{3}$$

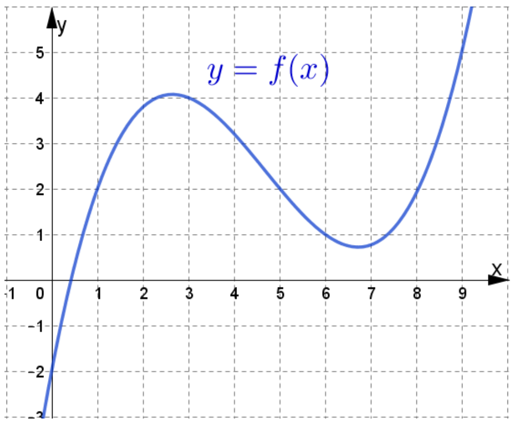
Arean är $\frac{32}{3}$ a. e. $\approx 10{,}7$ a. e.

Exempel (svår): I figuren nedan ser du grafen till $y = f(x)$. Bestäm med hjälp av figuren

a) $\int_1^9 f'(x)dx$

b) konstanten b så att

$$\int_1^b f'(x)dx = 0$$



a) $f(x)$ är en primitiv funktion till $f'(x)$. Vi får då att:

$$\int_1^9 f'(x)dx = [f(x)]_1^9 = f(9) - f(1) = 5 - 2 = 3$$

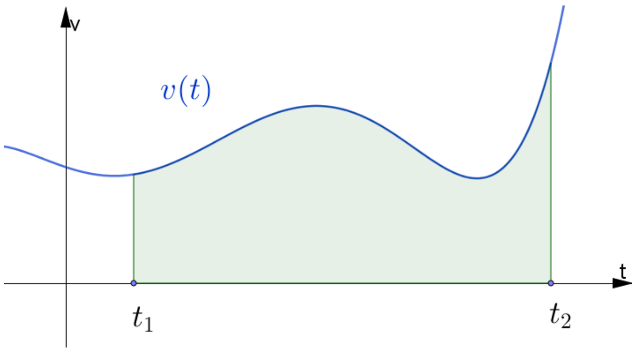
b) På samma sätt som i a):

$$\int_1^b f'(x)dx = f(b) - f(1) = f(b) - 2 = 0$$

Dvs, $f(b) = 2$. Från figuren ser vi att det finns två lösningar:

$b_1 = 5$ och $b_2 = 8$

Om $s(t)$ är en kropps läge s meter som funktion av tiden t sekunder så är $s'(t) = v(t)$ kroppens hastighet v m/s som funktion av tiden t s. Vi har förut noterat att $s(t)$ är då en primitiv funktion till $v(t)$. I figuren nedan ser vi grafen till $v(t)$ (kallas för $v - t$ −grafen).



Arean under $v - t$ −grafen mellan tiden t_1 och t_2 ger **förflyttningen** $\Delta s = s(t_2) - s(t_1)$ av kroppen under tidsintervallet, eftersom

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt = [s(t)]_{t_1}^{t_2} = s(t_2) - s(t_1)$$

Exempel: En kropp rör sig med hastigheten $v(t) = t^2$, där v är i m/s och t i sekunder. Bestäm dess förflyttning de tre första sekunderna.

$$\Delta s = s(3) - s(0) = \int_0^3 t^2 dt = [\frac{t^3}{3}]_0^3 = \frac{3^3}{3} - 0 = 9$$

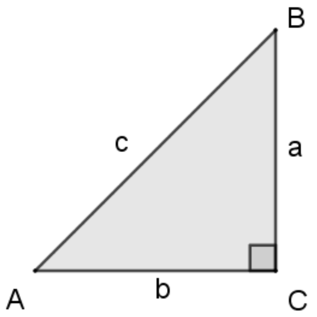
Dvs, kroppen förflyttade sig 9 m under de tre första sekunderna.

Trigonometri

Trigonometri med rätvinkliga trianglar

Triangeln ABC nedan är rätvinklig eftersom vinkeln C är 90˚. Vi använder beteckningen att mitt emot vinkel A står sida a, osv..

Vi har i Ma1c definierat $\sin A$, $\cos A$ och $\tan A$:



$$\sin A = \frac{a}{c}$$

$$\cos A = \frac{b}{c}$$

$$\tan A = \frac{a}{b}$$

Från de två första formlerna får vi att:

$a = c \cdot \sin A$ och $b = c \cdot \cos A$

Insättning i den tredje formeln ger att:

$$\tan A = \frac{a}{b} = \frac{c \cdot \sin A}{c \cdot \cos A} = \frac{\sin A}{\cos A}$$

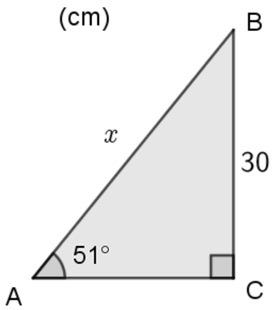
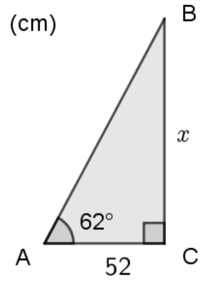
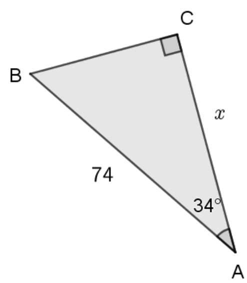
Dvs, $\tan A = \dfrac{a}{b} = \dfrac{\sin A}{\cos A}$

För en rätvinklig triangel gäller **Pythagoras sats**:

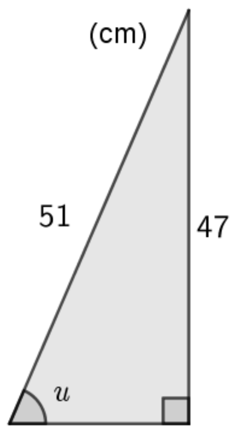
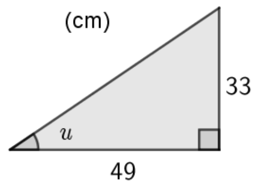
$c^2 = a^2 + b^2$

Vi ska kunna bestämma obekanta sidor och vinklar från Ma1c. Vi repeterar med några uppgifter.

Exempel: Bestäm sidan x i trianglarna.

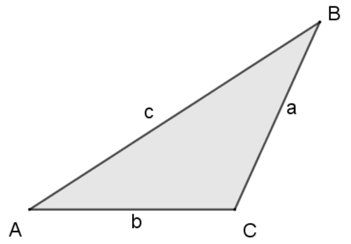
a) 	Lösning: $\sin 51° = \frac{30}{x}$ (lös ut x) $x = \dfrac{30}{\sin 50°} \approx 39{,}16$ $x = 39$ cm
b) 	Lösning: $\tan 62° = \frac{x}{52}$ (lös ut x) $x = 52 \tan 62° \approx 97{,}8$ $x = 98$ cm
c) (m) 	Lösning: $\cos 34° = \dfrac{x}{74}$ $x = 74 \cos 34° \approx 61{,}3$ $x = 61$ m

Exempel: Bestäm vinkeln u i trianglarna.

a) 	Lösning: $\sin u = \dfrac{47}{51}$ $u = \sin^{-1}\dfrac{47}{51} \approx 67{,}12°$ $u = 67°$
b) 	Lösning: $\tan u = \dfrac{33}{49}$ $u = \tan^{-1}\dfrac{33}{49} \approx 33{,}96°$ $u = 34°$

Enhetscirkeln

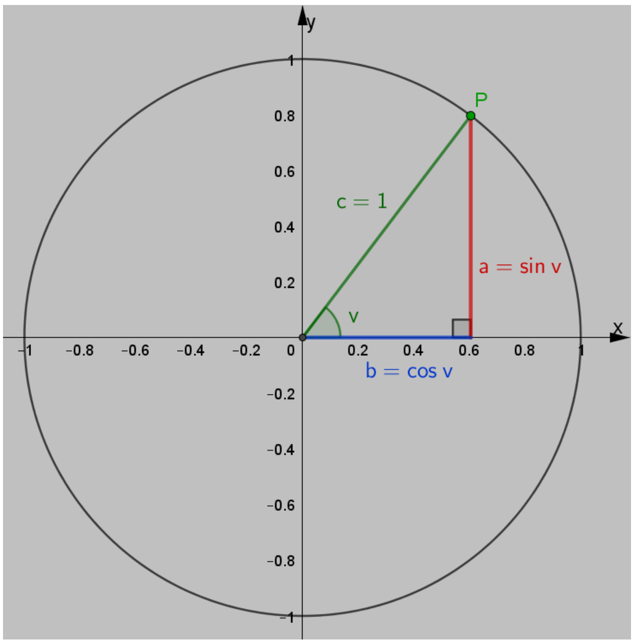
Vi vill bestämma obekanta sidor och vinklar för godtyckliga trianglar ABC:



Men varken Pythagoras sats eller formlerna $\sin A = \frac{a}{c}$, $\cos A = \frac{b}{c}$ och $\tan A = \frac{a}{b}$ gäller för godtyckliga trianglar. Så vi behöver hitta nya formler som gäller för alla trianglar och inte bara för rätvinkliga trianglar.

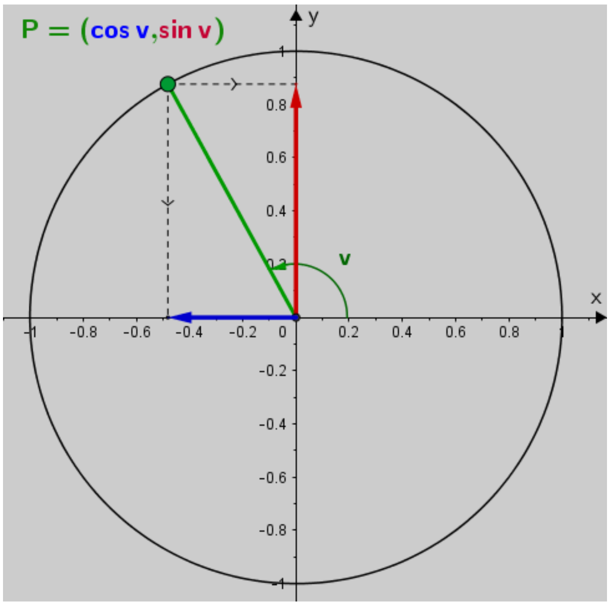
Vinklarna i rätvinkliga trianglar är $\leq 90°$, men godtyckliga trianglar kan ha en trubbig vinkel u $(90° < u < 180°)$. Så vi behöver definier $\sin u$, $\cos u$ och $\tan u$ för vinklar som är större än $90°$. Det gör vi med hjälp av **enhetscirkeln**.

Vi börjar med en rätvinklig triangel vars hypotenusa har längden 1 l.e. Det gör vi genom att rita in den i en cirkel med radien 1 l.e. (enhetscirkel):

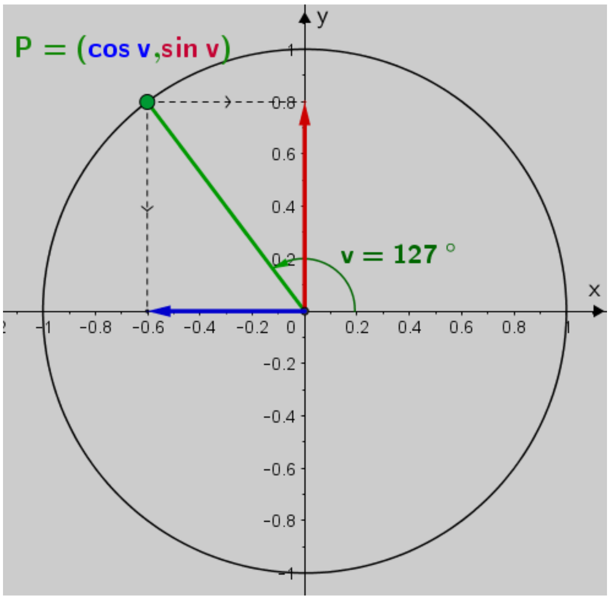


Men $\sin v = \frac{a}{c} = \frac{a}{1} = a$, och $\cos v = \frac{b}{c} = \frac{b}{1} = b$, så det betyder att punkten $P = (\cos v\,, \sin v)$. Dvs $\cos v$ är x-koordinaten av punkten P och $\sin v$ är y-koordinaten av punkten P.

Men på enhetscirkeln är vi inte begränsade att ha vinkeln $v \leq 90°$. **Vinkeln v, som räknas från den positiva x-axeln moturs**, kan nu ha vilket värde som helst. Därmed kan vi definiera $\cos v$ som x-koordinaten, och $\sin v$ som y-korrdinaten av P:



Exempel: Uppskata med hjälp av figuren nedan $\sin 127°$, $\cos 127°$ och $\tan 127°$.



Avläsning ger att $\sin 127° \approx 0{,}8$ och $\cos 127° \approx -0{,}6$. Vi får då att

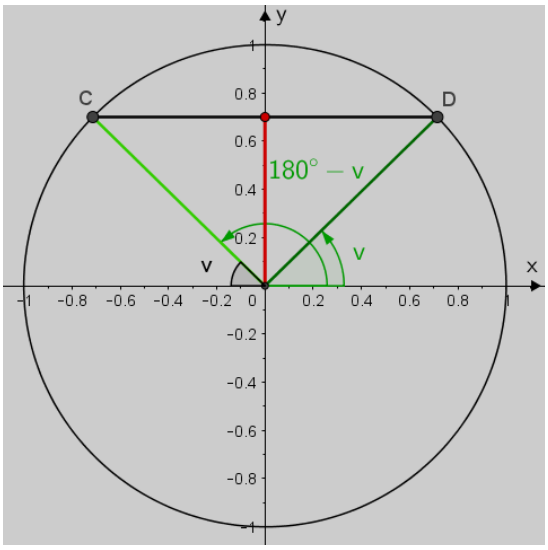
$$\tan 127° = \frac{\sin 127°}{\cos 127°} \approx \frac{0{,}8}{-0{,}6} \approx -1{,}3$$

Trigonometriska ekvationer

Från enhetscirkeln får vi följande egenskaper och samband:

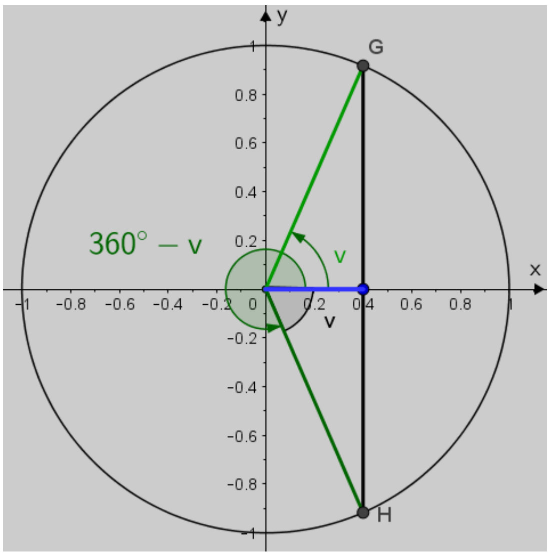
1) Punkterna C och D i figuren nedan har **samma y-koordinat**. Vinkeln v motsvarar punkten D och vinkeln $180° - \mathrm{v}$ motsvarar punkten C. Det betyder att:

$$\sin \mathrm{v} = \sin(180° - \mathrm{v})$$



2) Punkterna G och H i figuren har samma x-koordinat. Vinkeln v motsvarar punkten G och vinkeln $360° - \mathrm{v}$ motsvarar punkten H. Det betyder att:

$$\cos \mathrm{v} = \cos(360° - \mathrm{v})$$



3) $\cos \mathrm{v} < 0$ för $90° < \mathrm{v} < 270°$
$\sin \mathrm{v} < 0$ för $180° < \mathrm{v} < 360°$

4)

$\sin 0° = 0$	$\cos 0° = 1$
$\sin 90° = 1$	$\cos 90° = 0$
$\sin 180° = 0$	$\cos 180° = -1$

5) $-1 \leq \sin \mathrm{v} \leq 1$ och $-1 \leq \cos \mathrm{v} \leq 1$
$\Rightarrow$ Att exempelvis ekvationerna $\sin \mathrm{v} = 1{,}3$ och $\cos \mathrm{v} = -1{,}2$ **saknar lösningar.**

Exempel: Lös följande trigonometriska ekvationer i intervallet $0° \leq \mathrm{v} \leq 360°$.

a) $\sin \mathrm{v} = 0{,}70$ b) $\cos \mathrm{v} = 0{,}40$

---

a) Från egenskap 1) till vänster och motsvarande figur har vi att $\sin \mathrm{v} = \sin(180° - \mathrm{v})$, vilket betyder att vi får **två lösningar**. Från Ma1c kunde vi få 1:a lösningen:

$$\mathrm{v}_1 = \sin^{-1} 0{,}70 = 44{,}43°$$

Men nu får vi en lösning till:

$$\mathrm{v}_2 = 180° - \mathrm{v}_1 = 180° - 44{,}43° \approx 135{,}57°$$

Svar: $\mathrm{v}_1 = 44{,}4°$ och $\mathrm{v}_2 = 135{,}6°$

b) Från egenskap 2) till vänster och motsvarande figur har vi att $\cos \mathrm{v} = \cos(360° - \mathrm{v})$, vilket betyder att vi får **två lösningar**. Från Ma1c kunde vi få 1:a lösningen:

$$\mathrm{v}_1 = \cos^{-1} 0{,}40 = 66{,}42°$$

Men nu får vi en lösning till:

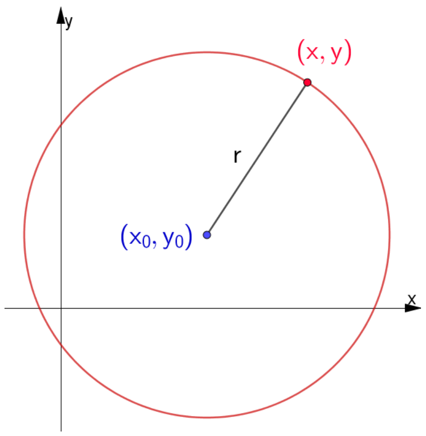
$$\mathrm{v}_2 = 360° - \mathrm{v}_1 = 360° - 66{,}42° \approx 293{,}6°$$

Svar: $\mathrm{v}_1 = 66{,}4°$ och $\mathrm{v}_2 = 293{,}6°$

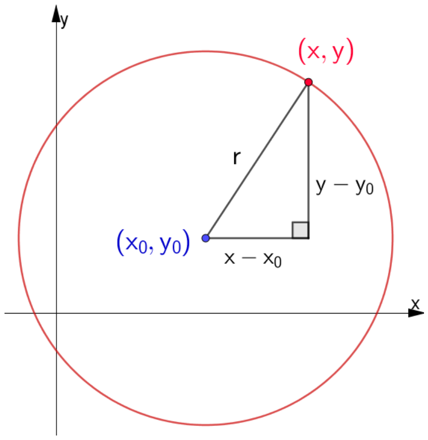
Notera att vinklarna i en godtycklig triangel är i intervallet $0° < \mathrm{v} < 180°$, och samma gäller för de två lösningarna till ekvationen $\sin \mathrm{v} = a$. Detta kommer att visa sig vara viktigt när vi bestämmer vinklar och sidor i godtyckliga trianglar.

Cirkelns ekvation

I figuren nedan ser du en cirkel med radien r och medelpunkten (x_0, y_0). En punkt på cirkeln har koordinaterna (x, y). Vad är cirkeln ekvation? Dvs, vad finns det för relation mellan x och y för de punkter som ligger på cirkeln?



Vi ritar in en rätvinklig triangel enligt figuren nedan.



Vi kan nu använda Pythagoras sats, som ger oss **cirkelns ekvation**:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Exempel: En cirkel har sin medelpunkt i punkten $(-2,3)$ och har radien 5 l.e.

a) Bestäm cirkelns ekvation.
b) Ligger punkten $(3,4)$ på cirkeln?

---

a) Insättning av $(x_0, y_0) = (-2,3)$ samt att $r = 5$ i cirkelns ekvation ger:

$$(x - (-2))^2 + (y - 3)^2 = 5^2$$

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$$

b) Punkten $(3,4)$ ligger på cirkeln om ekvationen $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$ blir sann för $x = 3$ och $y = 4$. Insättning ger:
$VL = (3 + 2)^2 + (4 - 3)^2 = 5^2 + 1^2 = 26 \neq HL$

Punkten $(3,4)$ ligger inte på cirkeln.

Exempel: Bestäm radien och medelpunkten för cirklarna med ekvationerna

a) $(x + 5)^2 + (y - 2)^2 = 16$
b) $x^2 + (y + 7)^2 = 10$
c) $x^2 - 4x + y^2 + 6y - 3 = 0$

Vi skriver om ekvationerna på formen $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ och sedan identifierar (x_0, y_0) och r.

a) $(x + 5)^2 + (y - 2)^2 = 16$
$(x - (-5))^2 + (y - 2)^2 = 4^2$
Dvs, $(x_0, y_0) = (-5,2)$ och $r = 4$.

b) $x^2 + (y + 7)^2 = 10$
$(x - 0)^2 + \left(y - (-7)\right)^2 = \left(\sqrt{10}\right)^2$
Dvs, $(x_0, y_0) = (0, -7)$ och $r = \sqrt{10}$.

c) Vi behöver först kvadratkomplettera $x^2 - 4x$ och $y^2 + 6y$ med hjälp av kvadreringsreglerna $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$. Allmänt gäller:

$$x^2 \pm kx = \left(x \pm \left(\frac{k}{2}\right)\right)^2 - \left(\frac{k}{2}\right)^2 \qquad \text{(Visa det!)}$$

Vi får då att:
$x^2 - 4x = (x - 2)^2 - 4$
$y^2 + 6y = (y + 3)^2 - 9$

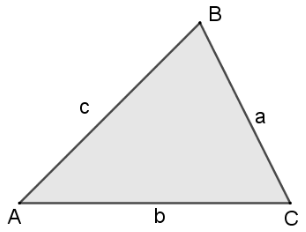
Vi skriver nu om
$x^2 - 4x + y^2 + 6y - 3 = 0$:
$(x - 2)^2 - 4 + (y + 3)^2 - 9 - 3 = 0$
$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 - 16 = 0$
$(x - 2)^2 + (y - (-3))^2 = 4^2$

Vi får att $(x_0, y_0) = (2, -3)$ och $r = 4$.

Trigonometri med godtyckliga trianglar

Areasatsen

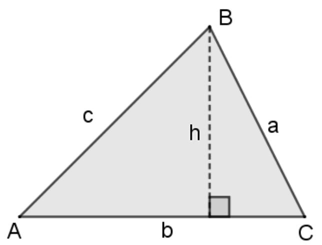
Vilken information behöver vi ha av triangeln ABC, för att kunna bestämma dess area?



Vi vet att

$$\text{Arean} = \frac{\text{basen} \cdot \text{höjden}}{2}$$

En triangel har <u>tre höjder</u>. Om vi nu drar en höjd h från B till sidan b, som i figuren nedan, så är



$$\text{Arean} = \frac{b \cdot h}{2}$$

Från den vänstra rätvinkliga triangeln får vi att

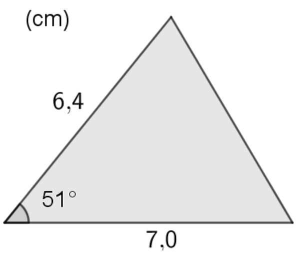
$$\sin A = \frac{h}{c} \Rightarrow h = c \cdot \sin A$$

Insättning av h i formeln för arean ger **areasatsen:**

$$\text{Arean} = \frac{b \cdot c \cdot \sin A}{2}$$

Dvs, om vi vet <u>två av triangelns sidor samt mellanliggande vinkel</u>, exempelvis b, c och A, så kan vi räkna ut triangelns area.

Exempel: Bestäm arean av triangeln.



Areasatsen ger att

$$\text{Arean} = \frac{6{,}4 \cdot 7{,}0 \cdot \sin 51°}{2} \text{cm}^2 \approx 17{,}4 \text{ cm}^2$$

Svar: Arean är 17 cm^2

Exempel: En triangel har en area på 16 m^2, och två av sidorna är 4,7 m respektive 8,4 m. Bestäm mellanliggande vinkel.

Låt u beteckna mellanliggande vinkeln av sidorna. Areasatsen ger en ekvation för vinkeln u:

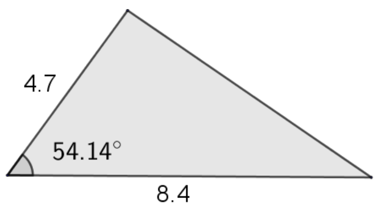
$$16 = \frac{4{,}7 \cdot 8{,}4 \cdot \sin u}{2} \qquad (\text{lös ut} \sin u)$$

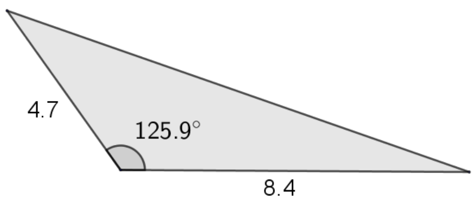
$$\sin u = \frac{2 \cdot 16}{4{,}7 \cdot 8{,}4} \approx 0{,}8105$$

Vi har fått en trigonometrisk ekvation som i intervallet $0° < u < 180°$ har <u>två lösningar</u>:

$$u_1 = \sin^{-1} 0{,}8105 \approx 54{,}14°$$

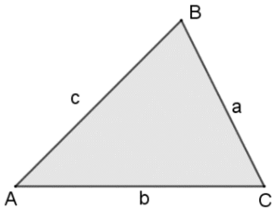
$$u_2 = 180° - u_1 \approx 180° - 54{,}14° \approx 125{,}9°$$





Vi får <u>två olika trianglar</u> med mellanliggande vinkeln 54,1° respektive 126°.

Sinussatsen



Eftersom en triangel har tre olika höjder kan vi med hjälp av areasatsen få arean på tre olika sätt:

$$\frac{b\cdot c\cdot \sin A}{2}=\frac{a\cdot b\cdot \sin C}{2}=\frac{c\cdot a\cdot \sin B}{2}$$

Vi multiplicerar nu alla led med 2 och får att

$$b\cdot c\cdot \sin A=a\cdot b\cdot \sin C=c\cdot a\cdot \sin B$$

Vi delar nu alla led med $a\cdot b\cdot c$:

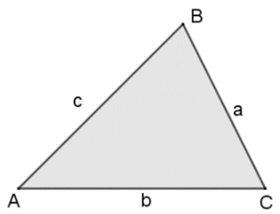
$$\frac{b\cdot c\cdot \sin A}{a\cdot b\cdot c}=\frac{a\cdot b\cdot \sin C}{a\cdot b\cdot c}=\frac{c\cdot a\cdot \sin B}{a\cdot b\cdot c}$$

Vi förkortar och får **sinussatsen**:

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin C}{c}=\frac{\sin B}{b}$$

Eller

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$



En triangel har 6 st obekanta: Vinklarna A, B och C samt de tre sidorna a, b och c. Vad är den minsta information vi behöver ha av en triangel för att kunna bestämma – med hjälp av samband mellan variablerna, som sinussatsen och vinkelsumman i en triangel – alla dess vinklar och sidor?

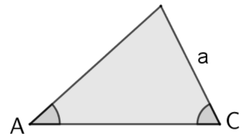
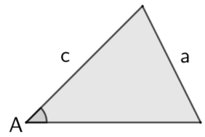
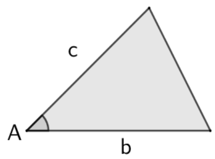
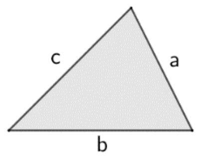
Vinkelsumman $A+B+C=180°$ bidrar med en ekvation. Så om vi vet två vinklar så vet vi även den tredje.

Sinussatsen bidrar med två oberoende ekvationer:

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin C}{c} \quad \text{och} \quad \frac{\sin C}{c}=\frac{\sin B}{b}$$

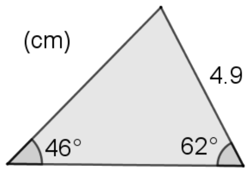
Vi har alltså sex obekanta och tre ekvationer. Vi behöver ha information om tre av triangelns obekanta för att kunna bestämma resterande tre.

Det finns fyra olika fall för vilken kombination av tre obekanta vi behöver ha information om:

 Två vinklar och en sida, vilken som helst	 Två sidor och motstående vinkel till en av dem
 Två sidor och mellanliggande vinkel	 Tre sidor

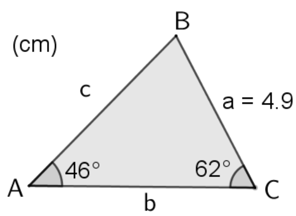
Med sinussatsen och vinkelsumman kan vi bestämma en triangel helt för de två översta fallen. För de två understa behöver vi en sats till, nämligen cosinussatsen, som vi återkommer till.

Exempel: Bestäm alla vinklar och sidor för triangeln.



Vi inför beteckningar enligt figuren.

Vi kan bestämma sidan c med sinussatsen:



$$\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}\Rightarrow c=\frac{a\cdot \sin C}{\sin A}=\frac{4{,}9\sin 62°}{\sin 46°}\approx 6{,}01$$

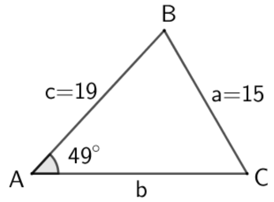
Från vinkelsumman får vi att $B=72°$. Vi kan nu bestämma b från sinussatsen:

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\sin A}\Rightarrow b=\frac{a\cdot \sin B}{\sin A}=\frac{4{,}9\sin 72°}{\sin 46°}\approx 6{,}48$$

Svar: $c=6{,}0$ cm, $b=6{,}5$ cm och $B=72°$

Exempel: En av vinklarna i en triangel är 49°, och sidan som står mitt emot vinkeln är 15 cm. Ytterliggare en sida är 19 cm. Bestäm alla vinklar och sidor för triangeln.

Vi skissar först triangeln grovt och inför variabler.



Vi kan bestämma vinkeln C med sinussatsen. Enklast – eftersom vi söker en vinkel – är att använda sinussatsen på formen:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c} \Rightarrow \sin C = \frac{c \cdot \sin A}{a} = \frac{19 \cdot \sin 49°}{15} \approx 0{,}956$$

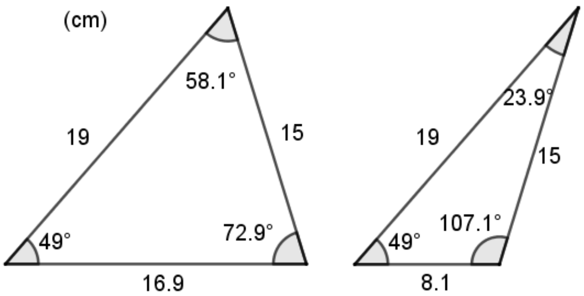
Dvs, vi har en trigonometrisk ekvation:

$$\sin C = 0{,}956$$

Men den ger två lösningar:

$$C_1 = \sin^{-1} 0{,}956 \approx 72{,}94°$$
$$C_2 = 180° - C_1 = 180° - 72{,}94° \approx 107{,}1°$$

Vi får en spetsig triangel där $C_1 = 72{,}9°$, och en trubbig triangel där $C_2 = 107{,}1°$:

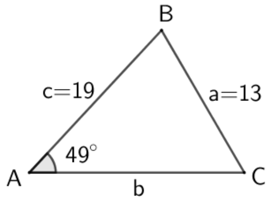


Vinkel B och sidan b kan bestämmas med vinkelsumman och sinussatsen. Kontrollera att värdena ovan stämmer.

Det är det här andra fallet som är mest komplex och som bl.a. kan ge två lösningar som i exemplet ovan. Men det kan också ge bara en lösning, inga lösningar eller falska lösningar. Vi tittar på några exempel:

Exempel: Samma som i exemplet ovan, utom att sidan som står mitt emot den kända vinkel (49°) är 13 cm. Den andra sidan är 19 cm som förut.

I figuren har vi skissat grovt på hur det skulle kunna se ut. Precis som i förra exemplet får vi en ekvation för vinkeln C:



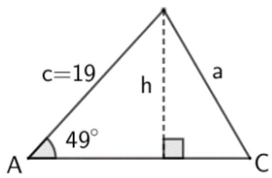
$$\sin C = \frac{c \cdot \sin A}{a} = \frac{19 \cdot \sin 49°}{13} \approx 1{,}1$$

Men ekvationen $\sin C = 1{,}1$ saknar lösningar då $-1 \leq \sin v \leq 1$. Varför har vi inga lösningar?

Obsevera att

$$\sin C = \frac{c \cdot \sin A}{a} = \frac{h}{a}$$

där $h = c \cdot \sin A = 19 \cdot \sin 49° \approx 14{,}3$ är höjden av triangeln:



● Man ser från figuren att om $a < h$ så kan man inte bilda en triangel.

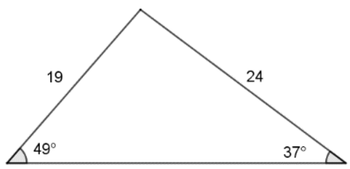
Matematiskt får vi då att

$\sin C = \frac{h}{a} > 1$, vilken saknar lösning.

● Men om $a = h$, får vi att $\sin C = \frac{h}{a} = 1 \quad \Rightarrow$ $C = 90°$, dvs en lösning där triangeln är rätvinklig.

● Vi får två lösningar om $h < a < c = 19$.

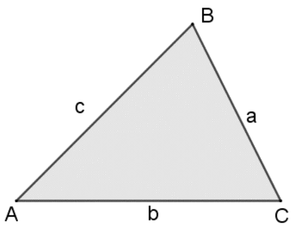
● Vi får en lösning om $a \geq c = 19$. Om exempelvis $a = 24$ får vi:



Vi ser nu grafiskt att vi inte kan få två lösningar.

Matematiskt får vi att $\sin C = \frac{c \cdot \sin A}{a} = \frac{19 \sin 49°}{24} \approx 0{,}597$ vilket ger att $C_1 \approx 36{,}7°$ och $C_2 \approx 143°$. Men bara $C_1 \approx 37°$ ger en lösning. $C_2 \approx 143°$ ger ingen lösning, då redan vinkelsumman $A + C = 49° + 143° > 180°$.

Cosinussatsen



Cosinussatsen är en generalisering av Pythagoras sats, som gäller för godtyckliga trianglar. Vi ska inte bevisa den här, utan bara formulera den:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$$

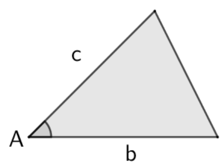
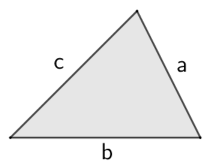
Notera att sidan c står ensam kvadrerad på ena sidan, och att dess motstående vinkel C finns i $\cos C$ på andra sidan.

Observera också att om $C = 90°$ (dvs, vi får då en rätvinklig triangel) så försvinner termen $-2ab \cdot \cos C$, eftersom $\cos 90° = 0$. Vi får då Pythagoras sats: $c^2 = a^2 + b^2$.

Naturligtvis gäller också

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos B$$

Som vi nämnt förut så kan vi inte lösa följande två fall med sinussatsen. Men det kan vi med cosinussatsen.

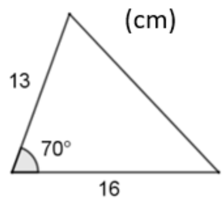
 Två sidor och mellanliggande vinkel	 Tre sidor

Om vi exempelvis försöker använda sinussatsen i fallet till vänster får vi att

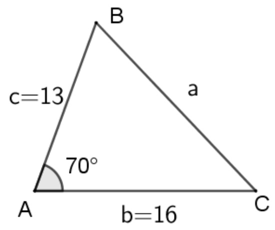
$$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A}$$

Men både a och C är obekanta. Vi har en ekvation och två obekanta. Vi kan inte bestämma dem!

Exempel: Bestäm alla vinklar och sidor i triangeln.



Vi inför variabler enligt figuren. Vi ser också från figuren att det bara kan finnas en lösning.



Vi bestämmer a med hjälp av cosinussatsen:

$$a^2 = 13^2 + 16^2 - 2 \cdot 13 \cdot 16 \cdot \cos 70° \approx 282{,}72$$
$$a \approx 16{,}81$$

Nu har vi alla sidorna. Vi behöver bestämma vinklarna B och C. Vi kan använda cosinussatsen eller sinussatsen. Enklast är om vi kunde använda sinussatsen (cosinussatsen kräver flera räkningar. Prova!). Men sinussatsen ger två lösningar: En spetsig och en trubbig vinkel. Vilken ska vi välja?

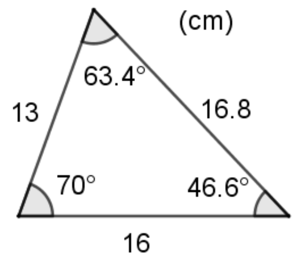
Den största vinkeln i en triangel är mitt emot den största sidan (vi kommer inte att visa detta, men det verkar intuitivt korrekt). I en triangel kan det dessutom **bara finnas en trubbig vinkel**.

I vårt fall är $a = 16{,}8$ den största sidan. Därmed är vinkel $A = 70°$ den största vinkeln i triangeln. Det följer då att både B och C måste vara spetsiga. Dvs, från sinussatsen väljer vi bara den spetsiga lösningen:

$$\frac{\sin B}{16} = \frac{\sin 70}{16{,}81} \Rightarrow \sin B \approx 0{,}8944$$

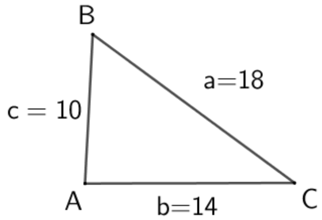
Vi får att $B \approx 63{,}43°$. Med vinkelsumman kan vi nu bestämma $C = 180° - A - B \approx 46{,}6°$.

Vi får då triangeln:



Exempel: En triangels sidor är 10 cm, 14 cm och 18 cm. Bestäm triangelns vinklar.

Vi ritar triangeln grovt och inför variabler. Man inser att, om det finns en lösning, så finns det bara en.



Vi behöver i första steget använda cosinussatsen för att bestämma en av vinklarna.

Vi kan använda cosinussatsen igen för att bestämma ytterligare en vinkel. Men enklast är att i andra steget använda sinussatsen då den kräver mindre räkningar. Men vi får då två lösningar: en trubbig och en spetsig. Vilken ska vi välja? En triangel kan ha max en trubbig vinkel. Finns det en trubbig vinkel så måste den ligga mitt emot den största sidan.

Klokast är då att använda cosinussatsen i första steget och bestämma triangelns största vinkel. När vi använder sedan sinussatsen i andra steget så behöver vi bara den spetsiga lösningen.

Vinkel A är störst då den ligger mitt emot största sidan $a = 18$ cm. Cosinussatsen ger:

$$18^2 = 10^2 + 14^2 - 2 \cdot 10 \cdot 14 \cdot \cos A$$
$$324 = 296 - 280 \cdot \cos A \quad \text{(vi löser ut } \cos A\text{)}$$
$$\cos A = -0{,}1 \ \Rightarrow A \approx 95{,}74°$$

Observera att ekvationen $\cos A = -0{,}1$ har bara en lösning i intervallet $0° < A < 180°$ (som är relevat för trianglar).

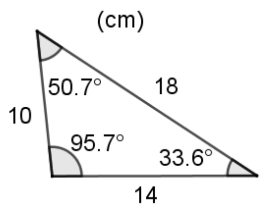
Sinussatsen ger för exempelvis vinkeln B:

$$\frac{\sin B}{14} = \frac{\sin 95{,}74°}{18} \ \Rightarrow \sin B \approx 0{,}7739$$

$B \approx 50{,}71°$ (spetsiga lösningen)

Vinkelsumman i triangeln ger att $C \approx 33{,}55°$

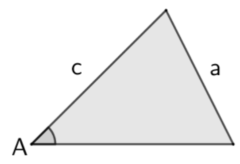
Vi får triangeln:



Exempel: En triangel har sidorna 5,0 cm, 6,0 cm och 12 cm. Bestäm triangelns vinklar.

För att det ska finnas en möjlig triangel så måste den längsta sidan av triangeln vara mindre än summa av de två andra sidorda (varför?). Men i vårt fall är $12 > 5{,}0 + 6{,}0$. Dvs det finns ingen triangel med de angivna sidorna.

Vi har tidigare sagt att man använder sinussatsen för att lösa uppgifter som i figuren till höger.



Två sidor och motstående vinkel till en av dem

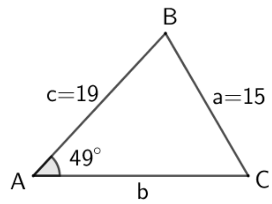
Men man kan även använda cosinussatsen.

Vi löste tidigare på s 35 nedanstående uppgift med sinussatsen och fann att det fanns två lösningar. Vi löser samma uppgift genom att istället använda cosinussatsen i första steget.

Exempel: En av vinklarna i en triangel är 49°, och sidan som står mitt emot vinkeln är 15 cm. Ytterligare en sida är 19 cm. Bestäm alla vinklar och sidor för triangeln.

Vi inför variabler enligt figuren.

Vi använder cosinussatsen för att bestämma b:



$$15^2 = b^2 + 19^2 - 2 \cdot b \cdot 19 \cdot \cos 49°$$
$$225 = b^2 + 361 - b \cdot 24{,}93$$
$$b^2 - 24{,}93 \cdot b + 136 = 0$$

Vi får alltså en andragradsekvation för b som ger två lösningar: $b_1 \approx 8{,}1$ och $b_2 \approx 16{,}9$. Samma lösningar som vi fick förut med sinussatsen.

Man kan sedan fortsätta med sinus- eller cosinussatsen för att bestämma vinklarna.